ERTAN SİNAN ŞAHİN

KALKÜLÜS 1

Ders Defteri

Bu defter video derslerle birlikte kullanılmak üzere hazırlanmıştır. Her ünitenin başındaki karekod o ünitenin videosuna götürür; sayfadaki boşluklar ders sırasında doldurulur.

ertansinansahin.com

Online Eğitim Seti
ertansinansahin.com
Sürüm 2026-11-07

İÇİNDEKİLER

1 Limitler ve Süreklilik 1

Değişim Oranları ve Eğrilere Teğet Doğrular . . . 1
Bir Fonksiyonun Limiti ve Limit Kuralları . . . 2
Limitin Tam Tanımı . . . 4
Tek Taraflı Limitler . . . 5
Sonsuzdaki Limitler ve Asimptotlar . . . 6
Süreklilik . . . 8
Alıştırmalar ve Problemler . . . 10
Cevaplar . . . 12

2 Türev 13

Teğet Doğruları ve Bir Noktadaki Türev . . . 13
Fonksiyon Olarak Türev . . . 14
Türev Alma Kuralları . . . 17
Türev ve Değişim Hızı . . . 18
Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri . . . 20
Zincir Kuralı . . . 20
Kapalı Fonksiyonun Türevi . . . 22
Ters ve Logaritma Fonksiyonlarının Türevi . . . 23
Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi . . . 25
İlişkili Değişim Oranları . . . 26
Lineerleştirme ve Diferansiyeller . . . 27
Alıştırmalar ve Problemler . . . 28
Cevaplar . . . 30

3 Türev Uygulamaları 33

Kapalı Aralıklarda Fonksiyonların Ekstremum Değerleri . . . 33
Ortalama Değer Teoremi . . . 35
Monoton Fonksiyonlar ve Birinci Türev Testi . . . 37
Konkavlık ve Eğri Çizimi . . . 39
Belirsiz Biçimler ve L'Hospital Kuralı . . . 41
Uygulamalı Optimizasyon . . . 43

Newton Yöntemi . . . 45
Terstürevler . . . 46
Alıştırmalar ve Problemler . . . 48
Cevaplar . . . 50

4 İntegral Yakında

5 İntegrasyon Uygulamaları 53

Kesit Alanıyla Hacim Hesabı . . . 53
Silindirik Kabuklarla Hacim Hesabı . . . 55
Eğri Uzunluğu . . . 55
Dönel Yüzey Alanları . . . 56
Fiziksel İş ve Basınç Kuvveti Hesaplamaları . . . 56
Moment ve Kütle Merkezi . . . 57
Alıştırmalar ve Problemler . . . 59
Cevaplar . . . 62

6 İntegraller ve Aşkın Fonksiyonlar Yakında

7 İntegrasyon Teknikleri 65

Temel İntegrasyon Formüllerinin Kullanımı . . . 65
Kısmi İntegrasyon . . . 66
Trigonometrik İntegraller . . . 68
Trigonometrik Dönüşümler . . . 70
Rasyonel Fonksiyonların Kısmi Kesirlere Ayırarak İntegrasyonu . . . 71
Has Olmayan İntegraller . . . 71
Alıştırmalar ve Problemler . . . 74
Cevaplar . . . 78

8 Sonsuz Diziler ve Seriler 79

Kısım 1 . . . 79
Motivasyon . . . 79
Diziler . . . 79
Sonsuz Seriler . . . 81
İntegral Testi . . . 83
Karşılaştırma Testleri . . . 84
Mutlak Yakınsaklık; Oran ve Kök Testleri . . . 85

Almaşık Seriler ve Koşullu Yakınsaklık . . . 87
Alıştırmalar ve Problemler . . . 88
Cevaplar . . . 91
Kısım 2 . . . 93
Kuvvet Serileri . . . 93
Taylor ve Maclaurin Serileri . . . 95
Taylor Serilerinin Uygulamaları . . . 98
Alıştırmalar ve Problemler . . . 100
Cevaplar . . . 102

9 Parametrik Denklemler ve Kutupsal Koordinatlar 103

Düzlem Eğrilerinin Parametrizasyonu . . . 103
Parametrik Eğrilerle Kalkülüs . . . 104
Kutupsal Koordinatlar . . . 105
Kutupsal Koordinat Denklemlerinin Grafiğinin Çizilmesi . . . 107
Kutupsal Koordinatlarda Alanlar ve Uzunluklar . . . 107
Konik Kesitleri . . . 108
Kutupsal Koordinatlarda Konikler . . . 110
Alıştırmalar ve Problemler . . . 113
Cevaplar . . . 114

Türkçe–İngilizce Terim Karşılıkları 117

1. ÜNİTE
LİMİTLER VE SÜREKLİLİK

video izle

Değişim Oranları ve Eğrilere Teğet Doğrular

Kalkülüsün doğuşuna yol açan iki temel problemi tanıyalım: bir eğriye teğet doğru çizmek ve bir eğrinin altında kalan alanı hesaplamak. Bu ünitede bunlardan birincisinin gerektirdiği araç olan limit kavramını inşa edeceğiz.

Durgun halden serbest bırakılan bir cisim için, y metre cinsinden düşülen yolu ve t saniye cinsinden geçen süreyi göstermek üzere serbest düşüş yasası

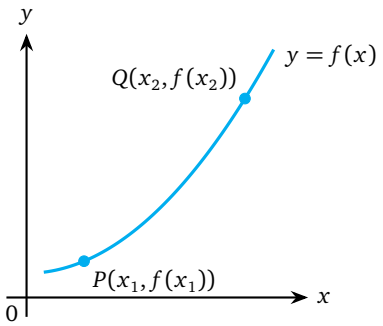
$$y = 4.9t^2$$

şeklindedir. Bu yasa üzerinden ortalama hız ile anlık hız arasındaki farkı tartışalım. Anlık hıza ulaşmak için neden bir limit almak zorunda olduğumuzu görelim.

TANIM: $y = f(x)$ fonksiyonunun $[x_1, x_2]$ aralığındaki **ortalama değişim oranı**, $h = x_2 - x_1 \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

ifadesidir. Geometrik olarak bu oran, eğrinin P ve Q noktalarından geçen **kesen** doğrusunun eğimidir.



ertansinansahin.com

ÖRNEK 1: Bir köprünün korkuluğundan bir cıvata düşürülüyor. Serbest düşüş yasasına göre:

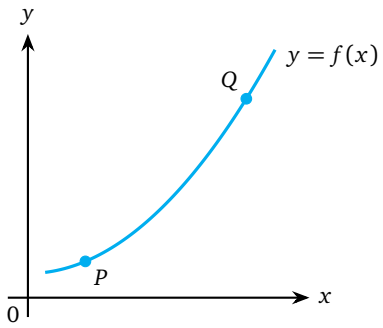
a. Cıvatanın ilk 4 s içindeki ortalama hızını bulunuz.

b. $t = 3$ s ile $t = 3 + h$ arasındaki ortalama hızı h cinsinden yazınız.

c. $h \to 0$ için bu ifadenin yaklaştığı değeri, yani $t = 3$ s anındaki anlık hızı bulunuz.

Bir eğriye teğet doğru

Q noktası eğri üzerinde P'ye yaklaşırken, P ile Q noktalarından geçen kesen doğrusunun eğiminin neye yaklaştığını inceleyelim. Bu limit yardımıyla bir eğrinin bir noktasındaki eğimini ve o noktadaki teğet doğrusunu tanımlayalım.



ÖRNEK 2: $y = x^2$ eğrisinin $P(1,1)$ noktasındaki teğet doğrusunun eğimini limit tanımını kullanarak bulunuz ve teğet doğrusunun denklemini yazınız.

ÖRNEK 3: $a \neq 0$ olmak üzere $y = \frac{1}{x}$ eğrisinin $x = a$ apsisli noktasındaki teğet doğrusunun eğimini bulunuz. Bu eğimin $-\frac{1}{4}$ olduğu noktaları belirleyiniz.

Bir Fonksiyonun Limiti ve Limit Kuralları

Bir örnek üzerinden, x bir fonksiyonun tanımlı olmadığı bir noktaya yaklaşırken fonksiyonun nasıl davrandığını inceleyelim.

ÖRNEK 4: $f(x) = \frac{x^2+x}{x+1}$ fonksiyonu $x = -1$ noktasında tanımlı değildir. x değerleri -1 sayısına soldan ve sağdan yaklaşırken $f(x)$ değerlerinin hangi sayıya yaklaştığını bir tablo yardımıyla belirleyiniz.

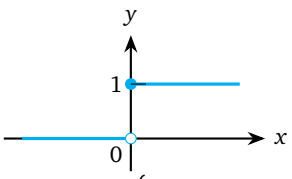
Değerleri birlikte hesaplayıp tabloya yazalım.

x	-1.1	-1.01	-1.001	-0.999	-0.99	-0.9
$f(x)$						

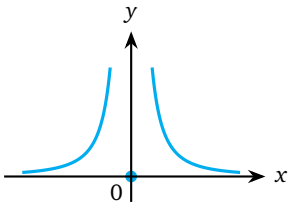
Buradan hareketle limitin sezgisel tanımını yapalım ve gösterimini yazalım. Bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin, o noktadaki değerinden bağımsız olduğunu vurgulayalım.

ertansinansahin.com

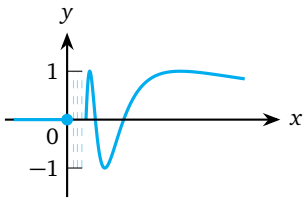
Limitin var olmadığı üç tipik durumu aşağıdaki grafikler üzerinden tartışalım: sıçrama, sınırsız büyüme ve sonsuz salınım. Üçünde de $x \to 0$ için limitin neden var olmadığını ayrı ayrı gerekçelendirelim.



$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$



$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin\dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

L, M, c ve k reel sayılar olmak üzere $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ve $\lim_{x\to c} g(x) = M$ olsun. Bu durumda aşağıdaki kurallar geçerlidir:

Toplam Kuralı: $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L + M$

Fark Kuralı: $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = L - M$

Sabit Çarpan Kuralı: $\lim_{x\to c}(k\cdot f(x)) = k\cdot L$

Çarpım Kuralı: $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = L\cdot M$

Bölüm Kuralı: $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, $M \neq 0$ için

Kuvvet Kuralı: $\lim_{x\to c}[f(x)]^n = L^n$, n pozitif tam sayı

Kök Kuralı: $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, n pozitif tam sayı

NOT: Kök kuralında n çift ise, c noktasını içeren bir aralıkta $f(x) \geq 0$ olduğu varsayılır.

Bir örnek üzerinden, bu kuralların polinomlarda, rasyonel ve köklü ifadelerde nasıl işlediğini görelim.

ÖRNEK 5: Aşağıdaki limitleri limit kurallarını kullanarak hesaplayınız.

a. $\lim_{x\to 2}\left(x^3 - 2x^2 + 4x - 1\right)$

b. $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x+2}{x^3+3}$

c. $\lim_{x\to 3}\sqrt{2x^2+7}$

Bir rasyonel fonksiyonun $x \to c$ limitinde x yerine c koyduğumuzda hem pay hem payda sıfır oluyorsa ne yapabileceğimizi bir örnek üzerinden görelim.

ÖRNEK 6: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$ limitini hesaplayınız.

Aynı durum köklü bir ifadede ortaya çıktığında ne yapacağımızı yine bir örnek üzerinden inceleyelim.

ÖRNEK 7: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$ limitini hesaplayınız.

ÖRNEK 8: $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}}{x}$ limitini hesaplayınız.

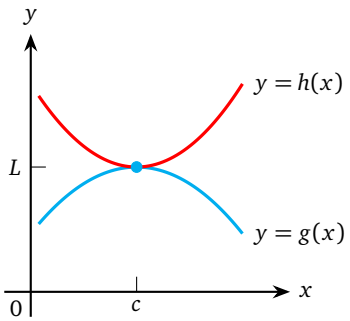
ertansinansahin.com

Yerine koyma $\frac{0}{0}$ verdiğinde izlediğimiz üç yolu toparlayalım.

İfade	Yöntem
Çarpanlanabilen	Sadeleştir
Köklü	Eşlenikle genişlet
Bileşik kesir	Ortak payda al

Sıkıştırma Teoremi

Aşağıdaki grafikte g ve h eğrileri $x = c$ noktasında aynı L değerine yaklaşıyor. Bu iki eğri arasında sıkışan bir f fonksiyonunun $x = c$ noktasında başka bir değere gidemeyeceğini grafik üzerinde tartışalım ve buradan sıkıştırma teoremini ifade edelim.



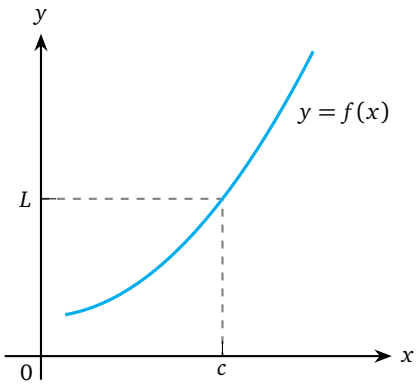
ÖRNEK 9: Aşağıdaki limitleri sıkıştırma teoremi yardımıyla bulunuz.

a. $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{3}{x}$

b. Her x için $2 - \frac{x^2}{3} \le u(x) \le 2 + x^2$ olduğuna göre $\lim_{x\to 0} u(x)$ kaçtır?

Limitin Tam Tanımı

Sezgisel tanımdaki "yeterince yakın" ifadesinin neden yetersiz olduğunu tartışalım. $f(x)$ değerlerini L sayısına istenen bir ϵ toleransı kadar yaklaştırmak için, x değerlerini c sayısına ne kadar yaklaştırmamız gerektiğini soralım.



TANIM: $f(x)$ fonksiyonu, c noktasını içeren bir açık aralıkta tanımlı olsun; c noktasında tanımlı olması gerekmez. Verilen her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık,

$$0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

koşulunu sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, x sayısı c'ye yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun limiti L'dir denir ve $\lim_{x\to c} f(x) = L$ yazılır.

ÖRNEK 10: $\lim_{x\to 2}(3x - 1) = 5$ olduğunu limitin tam tanımını kullanarak gösteriniz.

ÖRNEK 11: $f(x) = \sqrt{x}$, $c = 4$, $L = 2$ ve $\epsilon = 0.1$ veriliyor. Tanımdaki koşulu sağlayan bir $\delta > 0$ değeri bulunuz.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 12: $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ olduğunu limitin tam tanımını kullanarak kanıtlayınız.

Tek Taraflı Limitler

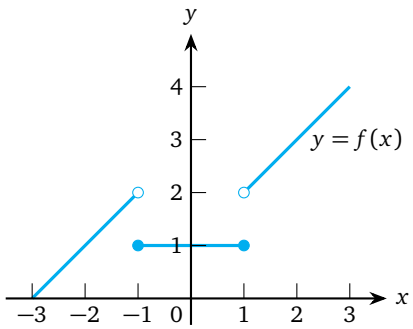
x bir noktaya yalnızca sağdan veya yalnızca soldan yaklaşırken fonksiyonun davranışını tanımlayalım. Sağdan limit ($x \to c^+$) ve soldan limit ($x \to c^-$) gösterimlerini yazalım.

TEOREM: Bir f fonksiyonunun c noktasında limitinin var olması için gerek ve yeter koşul, c noktasındaki sağdan ve soldan limitlerinin var ve birbirine eşit olmasıdır:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \iff \lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

ÖRNEK 13: $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasındaki soldan ve sağdan limitlerini bulunuz. $\lim_{x\to 3} f(x)$ limiti var mıdır?

ÖRNEK 14: Aşağıdaki grafik $y = f(x)$ fonksiyonunu göstermektedir. Bu grafiği kullanarak aşağıdaki değerleri belirleyiniz.



a. $\lim_{x\to -1^-} f(x)$

b. $\lim_{x\to -1^+} f(x)$

c. $\lim_{x\to -1} f(x)$

d. $f(-1)$

e. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

f. $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

g. $\lim_{x\to 1} f(x)$

h. $f(1)$

TEOREM: Açı radyan cinsinden ölçülmek üzere

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

ertansinansahin.com

ÖRNEK 15: Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{4x}$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$

c. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

d. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

ÖRNEK 16: Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x\to\infty} \left(3-\frac{2}{x}\right)$

b. $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2-3x+4}{2x^2+5}$

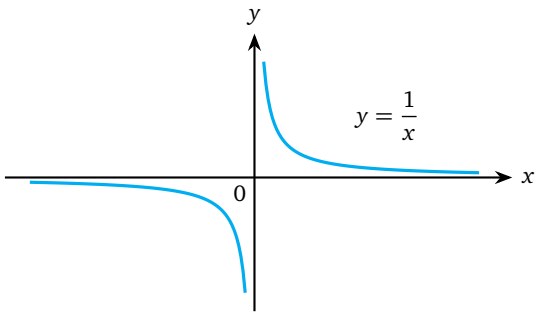
c. $\lim_{x\to-\infty} \frac{6x+5}{x^3-2}$

TANIM: Eğer $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ veya $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ ise $y = b$ doğrusuna $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin **yatay asimptotu** denir.

ertansinansahin.com

Sonsuzdaki Limitler ve Asimptotlar

x değişkeni sınırsız büyürken ya da sınırsız küçülürken fonksiyon değerlerinin davranışını tanımlayalım. Ardından $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ eşitliğini bu tanımı kullanarak gösterelim; $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ sonucunun da aynı yolla elde edildiğini belirtelim.



ÖRNEK 17: $f(x) = \frac{3x-4}{|x|+2}$ fonksiyonunun grafiğinin yatay asimptotlarını bulunuz.

ÖRNEK 18: Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x\to\pm\infty} x \sin\frac{1}{x}$ b. $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}$

ÖRNEK 19: Sıkıştırma teoremini kullanarak $y = 3 - \frac{\cos x}{x}$ eğrisinin yatay asimptotunu bulunuz.

ÖRNEK 20: $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+5}}{x-3}$ fonksiyonunun grafiğinin yatay asimptotlarını bulunuz.

ÖRNEK 21: $\lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt{x^2+25}\right)$ limitini hesaplayınız.

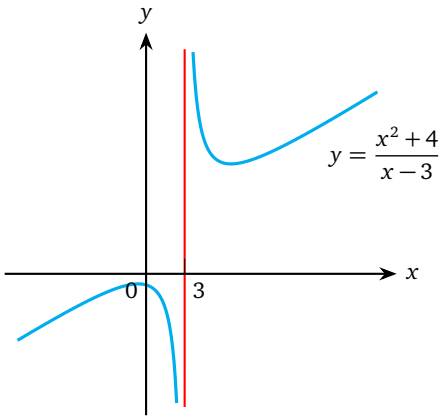
ÖRNEK 22: $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x} - x\right)$ limitini hesaplayınız.

ertansinansahin.com

Eğik Asimptotlar

Bir örnek üzerinden, payın derecesi paydanınkinden bir fazla olduğunda ortaya çıkan **eğik asimptot** kavramını polinom bölmesi yardımıyla inceleyelim.

ÖRNEK 23: $f(x) = \frac{x^2+4}{x-3}$ fonksiyonunun grafiğinin eğik asimptotunu bulunuz.



Sonsuz limitler

x sonlu bir sayıya yaklaşırken fonksiyon değerlerinin sınırsız büyümesi durumunu tanımlayalım ve $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \infty$ gösterimini yazalım. "Limit sonsuzdur" demenin limitin var olduğu anlamına gelmediğini, yalnızca var olmama biçimini tarif ettiğini vurgulayalım.

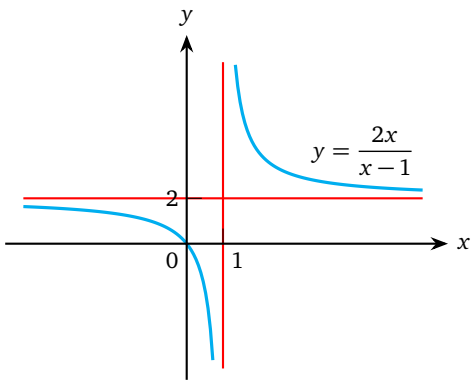
ÖRNEK 24: Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}$ c. $\lim_{x\to 3^-}\frac{x+1}{x-3}$

b. $\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}$ d. $\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2-1}$

TANIM: Eğer $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ veya $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ ise $x = a$ doğrusuna $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin **düşey asimptotu** denir.

ÖRNEK 25: $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir. Grafiği kullanarak aşağıdakileri belirleyiniz.



a. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

b. $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

c. $\lim_{x\to\infty} f(x)$

d. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

e. Düşey asimptot

f. Yatay asimptot

Baskın Terimler

Bir örnek üzerinden, bir polinomun $|x|$ büyükken yalnızca en yüksek dereceli terimi gibi davrandığını inceleyelim.

ÖRNEK 26: $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x - 7$ ve $g(x) = 2x^4$ fonksiyonları veriliyor. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitini hesaplayarak $|x|$ büyükken bu iki fonksiyonun birbirine yaklaştığını gösteriniz.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 27: Aşağıdaki limiti hesaplayınız.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x-1}{x-2}$$

P ve Q polinom olmak üzere, $\frac{P}{Q}$ rasyonel fonksiyonunun $x \to \pm\infty$ limitini derecelere göre toparlayalım; a ve b bu polinomların baş katsayılarıdır.

Dereceler	Limit
$\text{der}\,P < \text{der}\,Q$	0
$\text{der}\,P = \text{der}\,Q$	$\frac{a}{b}$
$\text{der}\,P > \text{der}\,Q$	$\pm\infty$

Son satırda derece farkı tam 1 ise grafiğin ayrıca bir eğik asimptotu vardır.

Süreklilik

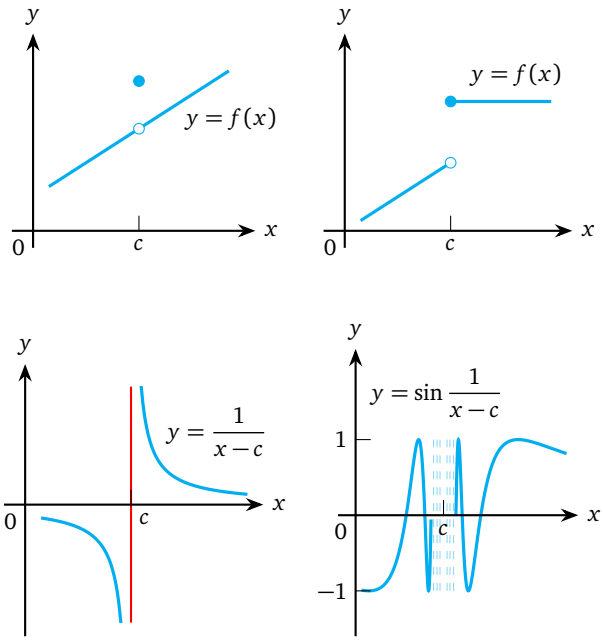
Bir fonksiyonun grafiğinin "kalemi kaldırmadan" çizilebilmesi düşüncesinden yola çıkarak süreklilik kavramına sezgisel bir giriş yapalım. Ardından bir fonksiyonun bir noktada sürekli olabilmesi için gereken üç koşulu tek tek inceleyelim.

TANIM: c sayısı, f fonksiyonunun tanım kümesindeki bir aralığın iç noktası veya uç noktası olsun. Eğer

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

ise f fonksiyonu c noktasında **süreklidir** denir. Benzer şekilde $\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$ ise f fonksiyonu c noktasında **sağdan sürekli**, $\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$ ise **soldan süreklidir**. Bir fonksiyon, tanım kümesinin her noktasında sürekli ise **sürekli fonksiyon** adını alır.

Aşağıdaki dört grafiğin her birinde f fonksiyonu $x = c$ noktasında süreksizdir. Her birinde sürekliliğin hangi koşulunun bozulduğunu belirleyelim ve süreksizliğin türünü adlandıralım.



ÖRNEK 28: $x \neq 3$ için $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ olarak veriliyor. Fonksiyonun $x = 3$ noktasında sürekli olması için $g(3)$ değeri ne olmalıdır? Bu süreksizliğin türü nedir?

ÖRNEK 29: $h(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-4}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları bulunuz ve her birinin süreksizlik türünü belirtiniz.

ÖRNEK 30: Aşağıdaki fonksiyonun her reel sayıda sürekli olması için a ve b sabitlerini bulunuz.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ bx - 1, & x > 2 \end{cases}$$

f ve g fonksiyonları c noktasında sürekli olsun. Bu durumda aşağıdaki fonksiyonlar da c noktasında süreklidir:

Toplam: $f + g$

Fark: $f - g$

Sabit Çarpan: $k \cdot f$, herhangi bir k sayısı için

Çarpım: $f \cdot g$

Bölüm: f/g, $g(c) \neq 0$ için

Kuvvet: f^n, n pozitif tam sayı

Kök: $\sqrt[n]{f}$, n pozitif tam sayı olmak üzere, $\sqrt[n]{f}$'nin c noktasını içeren bir aralıkta tanımlı olması koşuluyla

Tanım kümesinin her noktasında sürekli olduğunu bildiğimiz fonksiyon ailelerini örnekler üzerinden inceleyelim.

Fonksiyon Ailesi	Örnek
Polinom	$x^3 - 2x + 5$
Rasyonel	$\frac{x+1}{x^2-4}$
Köklü	$\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$
Trigonometrik	$\sin x$, $\cos x$
Üstel	e^x, 2^x
Logaritmik	$\ln x$, $\log_a x$

g fonksiyonu c noktasında, f fonksiyonu $g(c)$ noktasında sürekli olsun. $f \circ g$ bileşkesinin c noktasındaki sürekliliğini tartışalım.

ertansinansahin.com

Bu sonuç bir limit hesaplama aracına dönüşür: f sürekli ise limit sembolü fonksiyonun içine girebilir.

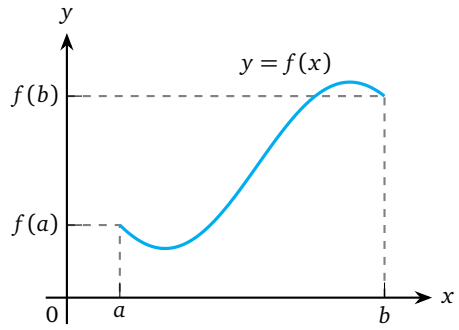
$$\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$$

ÖRNEK 31: Aşağıdaki limiti hesaplayınız.

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x^2-1}{x-1}}$$

Ara Değer Teoremi

Aşağıdaki grafikte f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında süreklidir. $f(a)$ ile $f(b)$ arasında bir y_0 değeri seçelim; fonksiyonun bu değeri aralıkta alıp almadığını grafik üzerinde inceleyelim.



Sürekliliğin neden vazgeçilmez olduğunu da tartışalım.

ÖRNEK 32: $x^3+x-3=0$ denkleminin $[1,2]$ aralığında en az bir kökü olduğunu gösteriniz.

ÖRNEK 33: $f(x)=x^3-12x+2$ fonksiyonunun $[-4,4]$ aralığında üç farklı kökü olduğunu ara değer teoremi yardımıyla gösteriniz.

ÖRNEK 34: Ara değer teoremini kullanarak $\sqrt{3x+1}=5-x^2$ denkleminin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

Alıştırmalar ve Problemler

1. $y=x^2-4x+3$ parabolü veriliyor.

a. $x=1$ ile $x=4$ aralığındaki ortalama değişim oranını bulunuz.

b. $x=3$ apsisli noktadaki teğet doğrusunun denklemini limit tanımını kullanarak yazınız.

2. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2-4}$

b. $\lim_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

c. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}$

d. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 8x}$

e. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 2x}$

f. $\lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

ertansinansahin.com

3. Her $x \geq 0$ için $2x - x^2 \leq f(x) \leq 2\sqrt{x} - x$ olduğu biliniyor. $\lim_{x\to 1} f(x)$ limitini bulunuz ve hangi teoremi kullandığınızı belirtiniz.

4. $\lim_{x\to 3}(2x+1) = 7$ olduğunu limitin tam tanımını kullanarak kanıtlayınız. Verilen $\epsilon = 0.02$ için uygun bir δ değeri yazınız.

5. Aşağıdaki fonksiyonun her reel sayıda sürekli olması için a ve b sabitlerini bulunuz.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x < 1 \\ ax + b, & 1 \leq x < 3 \\ 2x - 5, & x \geq 3 \end{cases}$$

6. $f(x) = \frac{2x^2-5x-3}{x^2-9}$ fonksiyonu veriliyor.

a. Süreksiz olduğu noktaları bulunuz.

b. Her birinin süreksizlik türünü belirtiniz.

c. Varsa düşey asimptotunu yazınız.

d. Varsa yatay asimptotunu yazınız.

7. $g(x) = \frac{2x^2-x+1}{x-1}$ fonksiyonunun grafiğinin düşey ve eğik asimptotlarını bulunuz.

8. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ fonksiyonu için $f(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (0, 1)$ sayısının var olduğunu gösteriniz.

ertansinansahin.com

Cevaplar

Örnek sorular

1 a. 19.6 m/s b. $29.4+4.9h$ m/s c. 29.4 m/s

2 $m=2,\ \ y=2x-1$

3 $m=-\frac{1}{a^2};\ \ (2,\frac{1}{2}),(-2,-\frac{1}{2})$

4 -1

5 a. 7 b. 1 c. 5

6 $\frac{2}{3}$

7 $\frac{1}{6}$

8 $-\frac{1}{4}$

9 a. 0 b. 2

10 $\delta=\frac{\epsilon}{3}$

11 $\delta=0.39$

12 $\delta=\min\{1,\frac{\epsilon}{5}\}$

13 $-1;\ \ 1;\ \ \text{limit yoktur}$

14 a. 2 b. 1 c. yok d. 1
e. 1 f. 2 g. yok h. 1

15 a. $\frac{3}{4}$ b. $\frac{3}{5}$ c. 0 d. $\frac{1}{2}$

16 a. 3 b. $\frac{7}{2}$ c. 0

17 $y=3$ ve $y=-3$

18 a. 1 b. 0

19 $y=3$

20 $y=2$ ve $y=-2$

21 0

22 $\frac{3}{2}$

23 $y=x+3$

24 a. $-\infty$ b. $+\infty$ c. $-\infty$ d. yok

25 a. $-\infty$ b. $+\infty$ c. 2
d. 2 e. $x=1$ f. $y=2$

26 1

27 $-\infty$

28 $g(3)=6$; kaldırılabilir süreksizlik

29 $x=2$: kaldırılabilir $x=-2$: sonsuz

30 $a=-1,\ \ b=2$

31 $\sqrt{2}$

32 $f(1)=-1<0<7=f(2)$

33 $(-4,-3),\ \ (0,1),\ \ (3,4)$

34 $f(0)=-4<0<\sqrt{7}-1=f(2)$

Alıştırmalar ve problemler

1 a. 1 b. $y=2x-6$

2 a. -3 b. $\frac{1}{4}$ c. $-\frac{1}{4}$ d. $\frac{5}{8}$ e. $\frac{1}{2}$ f. $2x$

3 1; sıkıştırma teoremi

4 $\delta=\frac{\epsilon}{2};\ \ \delta=0.01$

5 $a=-\frac{1}{2},\ \ b=\frac{5}{2}$

6 a. $x=3,\ x=-3$ b. kaldırılabilir, sonsuz
c. $x=-3$ d. $y=2$

7 $x=1;\ \ y=2x+1$

8 $f(0)=1>0>-1=f(1)$

ertansinansahin.com

2. ÜNİTE
TÜREV

video izle

Teğet Doğruları ve Bir Noktadaki Türev

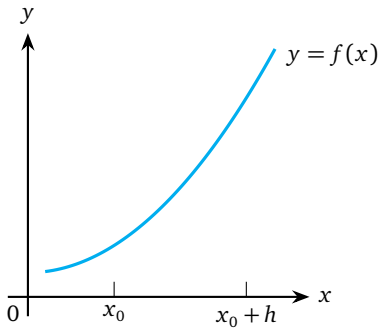
Ünite 1'de bir eğrinin bir noktadaki eğimini, kesen eğimlerinin limiti olarak elde etmiştik. Bu limite bir ad verelim ve onu bir fonksiyonun bir noktadaki türevi olarak tanımlayalım.

TANIM: $h \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ifadesine f fonksiyonunun x_0 noktasındaki h artımlı **fark bölümü** denir. Bu ifadenin $h \to 0$ için limiti varsa, bu limite f fonksiyonunun x_0 noktasındaki **türevi** denir ve $f'(x_0)$ ile gösterilir:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



ertansinansahin.com

ÖRNEK 1: $f(x) = x^3 + x$ fonksiyonunun $x_0 = 1$ noktasındaki türevini tanımı kullanarak bulunuz. Eğrinin bu noktadaki teğet doğrusunun denklemini yazınız.

ÖRNEK 2: $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $x_0 = 1$ noktasındaki türevini tanımı kullanarak bulunuz.

Fark bölümünü bir ortalama değişim oranı olarak okuduğumuzda türevin neyi ölçtüğünü bir örnek üzerinden inceleyelim.

ÖRNEK 3: Yerden düşey doğrultuda yukarı atılan bir topun t saniye sonraki yüksekliği $s(t) = 20t - 5t^2$ metredir. Topun aşağıdaki anlardaki anlık hızını türevin tanımını kullanarak bulunuz ve iki sonucun işaretini yorumlayınız.

a. $t = 1$ s

b. $t = 3$ s

Fark bölümünün limitinin şimdiye kadar karşımıza çıkan farklı yorumlarını toparlayalım.

Aşağıdaki limit, şu dört niceliğin her birini ifade eder:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

1. $y = f(x)$ grafiğinin $x = x_0$ noktasındaki eğimi,
2. $y = f(x)$ eğrisinin $x = x_0$ noktasındaki teğet doğrusunun eğimi,
3. $f(x)$'in $x = x_0$ noktasında x'e göre değişim oranı,
4. f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi $f'(x_0)$.

Düşey teğet doğruları

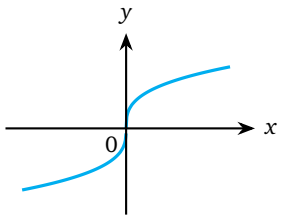
Fark bölümünün limiti sonlu bir sayı olmak yerine sınırsız büyüyebilir. Bu durumda eğrinin o noktadaki teğetinin ne olacağını tartışalım.

TANIM: Sürekli bir $y = f(x)$ eğrisi için

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \infty \quad \text{veya} \quad -\infty$$

ise eğrinin $x = x_0$ noktasında bir **düşey teğet doğrusu** vardır.

Bu tanımı kullanarak aşağıdaki eğrinin orijinde düşey teğet doğrusu olduğunu gösterelim.



$y = x^{1/3}$

ertansinansahin.com

Fonksiyon Olarak Türev

Şimdiye kadar türevi tek bir x_0 noktasında hesapladık. Bu noktayı serbest bırakalım ve türevi, her x değerine bir eğim karşılık getiren yeni bir fonksiyon olarak tanımlayalım.

TANIM: f fonksiyonunun x değişkenine göre **türevi**, x noktasındaki değeri

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

olan f' fonksiyonudur (limit varsa). $f'(x)$ varsa f fonksiyonu x noktasında **türevlenebilirdir**. Aynı limit $z = x + h$ yazılarak eşdeğer biçimde şöyle de ifade edilir:

$$f'(x) = \lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

ÖRNEK 4: $f(x) = x^3$ fonksiyonunun türevini tanımı kullanarak bulunuz. Ardından $f'(-1)$, $f'(0)$ ve $f'(2)$ değerlerini hesaplayınız.

ÖRNEK 5: $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun türevini, türevin eşdeğer biçimini $(z \to x)$ kullanarak bulunuz. Eğrinin $x = 9$ noktasındaki teğet doğrusunun eğimini bulunuz.

Türev için kullanılan farklı gösterimleri ve türevin bir noktadaki değerinin nasıl yazıldığını inceleyelim.

NOT: $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi için şu gösterimler kullanılır:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

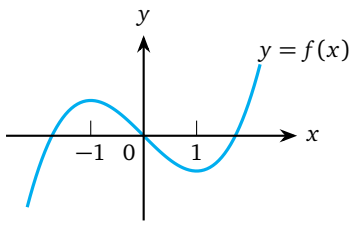
Türevin $x = a$ noktasındaki değeri şöyle yazılır:

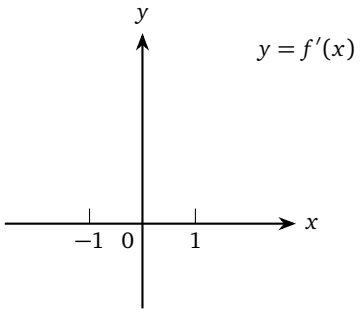
$$f'(a) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=a}$$

Türevin grafiği

Bir örnek üzerinden, bir fonksiyonun grafiğindeki eğimleri okuyarak türevinin grafiğinin nasıl çizileceğini görelim.

ÖRNEK 6: Aşağıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Grafikteki eğimleri kullanarak $y = f'(x)$ fonksiyonunun grafiğini altındaki eksenlere çiziniz. f' hangi noktalarda sıfırdır, hangi aralıkta negatiftir?





ertansinansahin.com

Tek taraflı türevler

Ünite 1'deki tek taraflı limitleri fark bölümüne uygulayalım ve bir aralığın uç noktalarında türevin ne anlama geldiğini tanımlayalım.

TANIM: f fonksiyonunun x_0 noktasındaki **sağdan türevi** ve **soldan türevi** sırasıyla şu limitlerdir:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

f, (a, b) aralığının her noktasında türevlenebilirse ve a'da sağdan, b'de soldan türevi varsa $[a, b]$ kapalı aralığında türevlenebilirdir. Bir iç noktada türevin var olması için gerek ve yeter koşul, o noktadaki sağdan ve soldan türevlerin var ve birbirine eşit olmasıdır.

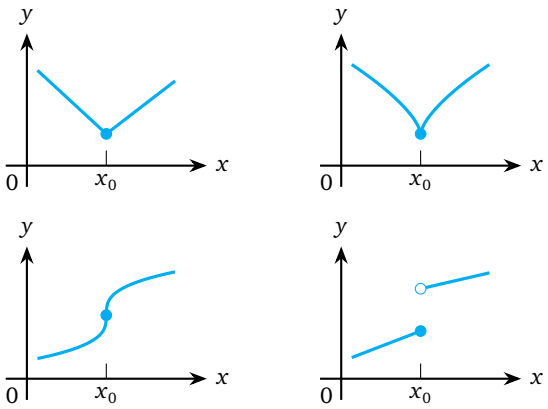
ÖRNEK 7: $f(x)=|x|$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki sağdan ve soldan türevlerini bulunuz. f bu noktada türevlenebilir midir?

ÖRNEK 8: Aşağıdaki fonksiyonun $x=1$ noktasında türevlenebilir olup olmadığını sağdan ve soldan türevlerini hesaplayarak belirleyiniz.

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leq 1 \\ 2x-1, & x>1 \end{cases}$$

ertansinansahin.com

Bir fonksiyonun bir noktada türevinin olmamasına yol açan tipik durumları aşağıdaki grafikler üzerinden tartışalım. Her birinde, $P(x_0,f(x_0))$ noktasından geçen kesenlerin eğimlerine ne olduğunu inceleyelim.



Türevlenebilirlik ile süreklilik arasındaki ilişkiyi ifade edelim ve ispatlayalım.

TEOREM: f fonksiyonunun $x=c$ noktasında türevi varsa, f bu noktada süreklidir.

ÖRNEK 9: Aşağıdaki fonksiyonun $x=1$ noktasında türevlenebilir olup olmadığını belirleyiniz ve cevabınızı gerekçelendiriniz.

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ x^2, & x\geq 1 \end{cases}$$

Türev Alma Kuralları

Şimdiye kadar her türevi fark bölümünün limitiyle hesapladık. Polinomlar, kökler ve üstel fonksiyonlar için bu işi bir kez yapıp sonucu bir kural olarak yazalım.

Önce sabit fonksiyonların ve x'in kuvvetlerinin türevini çıkaralım.

TEOREM: c bir sabit ve n herhangi bir gerçel sayı olmak üzere

$$\frac{d}{dx}(c) = 0, \qquad \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

eşitlikleri, kuvvetlerin tanımlı olduğu her x için geçerlidir.

ÖRNEK 10: Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini kuvvet kuralını kullanarak bulunuz.

a. x^5

b. $\dfrac{1}{x^3}$

c. $x^{3/2}$

d. $\sqrt[3]{x^5}$

Bir fonksiyonun sabit katının ve iki fonksiyonun toplamının türevinin nasıl alındığını inceleyelim.

TEOREM: u ve v türevlenebilir fonksiyonlar, c bir sabit olmak üzere

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

eşitlikleri geçerlidir.

ÖRNEK 11: Aşağıdaki fonksiyonun türevini bulunuz.

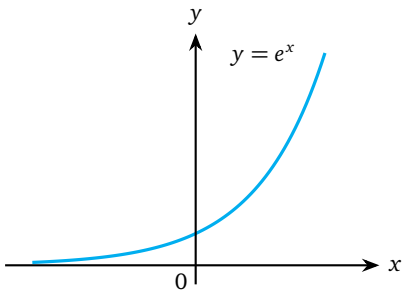
$$y = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 7x - 3$$

Üstel fonksiyonun türevi

Üstel fonksiyon e^x'in türevini fark bölümünden çıkaralım.

TEOREM: Üstel fonksiyon e^x'in türevi kendisine eşittir:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$



ÖRNEK 12: $f(x) = 2e^x - 5x^2 + 3$ fonksiyonunun türevini bulunuz ve $f'(0)$ değerini hesaplayınız.

ertansinansahin.com

Çarpım ve bölüm

Bir örnek üzerinden, iki fonksiyonun çarpımının türevinin türevlerin çarpımına eşit olup olmadığını inceleyelim.

ÖRNEK 13: $f(x)=x^2$ ve $g(x)=x^3$ olsun. $(fg)'(x)$ ile $f'(x)g'(x)$ ifadelerini hesaplayıp karşılaştırınız.

Çarpımın ve bölümün türevini veren kuralları yazalım.

TEOREM: u ve v türevlenebilir fonksiyonlar ise

$$\frac{d}{dx}(uv)=u'v+uv'$$

olur. Buna **çarpım kuralı** denir.

TEOREM: u ve v türevlenebilir fonksiyonlar ve $v\neq 0$ ise

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

olur. Buna **bölüm kuralı** denir.

ÖRNEK 14: $y=(x^3-2x)(x^2+4)$ fonksiyonunun türevini çarpım kuralını kullanarak bulunuz.

ÖRNEK 15: Aşağıdaki fonksiyonun türevini bölüm kuralını kullanarak bulunuz.

$$y=\frac{x^2}{x+3}$$

Yüksek mertebeden türevler

Türevin türevini alarak yüksek mertebeden türevleri tanımlayalım ve gösterimlerini yazalım.

TANIM: $y=f(x)$ fonksiyonunun türevinin türevine **ikinci türev** denir. Türev alma işlemi n kez uygulanırsa **n-inci mertebeden türev** elde edilir:

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x),\qquad y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(x)$$

ÖRNEK 16: Aşağıdaki fonksiyonun ilk dört türevini bulunuz.

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

ertansinansahin.com

Türev ve Değişim Hızı

Bir örnek üzerinden, türevi bir niceliğin başka bir niceliğe göre anlık değişim hızı olarak yorumlayalım ve türevin birimini nasıl okuyacağımızı görelim.

ÖRNEK 17: Bir kürenin yüzey alanı $S=4\pi r^2$ ile verilir. Yarıçap $r=3$ m iken yüzey alanının yarıçapa göre değişim hızını birimiyle birlikte bulunuz.

Doğru boyunca hareket

Bir doğru üzerinde hareket eden cismin konumundan hızı, süratini ve ivmesini tanımlayalım.

TANIM: Bir cismin s-ekseni üzerindeki konumu $s = f(t)$ olsun. t ile $t + \Delta t$ arasındaki **yer değiştirme** $\Delta s = f(t+\Delta t) - f(t)$, **ortalama hız** $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ ve t anındaki **hız**

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

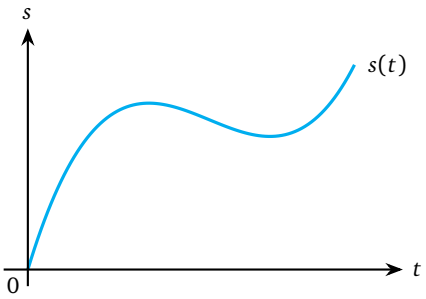
ile tanımlanır.

TANIM: Hızın mutlak değerine **sürat**, hızın zamana göre türevine **ivme**, ivmenin zamana göre türevine **silkme** denir:

$$|v(t)| = \left|\frac{ds}{dt}\right|, \qquad a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

ÖRNEK 18: Bir doğru üzerinde hareket eden bir cismin t saniye sonraki konumu $s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ metredir $(t \geq 0)$.



a. $v(t)$ ve $a(t)$ ifadelerini bulunuz.

b. Cismin durduğu anları bulunuz.

c. $t = 1$ ve $t = 5$ anlarının her birinde, hız ve ivmenin işaretine bakarak cismin süratinin artmakta mı azalmakta mı olduğunu belirleyiniz.

Ekonomide türev

Ekonomide türeve marjinal denir. Üretim maliyetinin türevinin ne anlama geldiğini inceleyelim.

NOT: x birim üretmenin maliyeti $C(x)$ ise $C'(x)$ türevine **marjinal maliyet** denir. Bir birim daha üretmenin ek maliyetine yaklaşık olarak eşittir:

$$C'(x) \approx C(x+1) - C(x)$$

ÖRNEK 19: Bir atölyede günde x adet ürün üretmenin maliyeti $C(x) = 200 + 10x + x^2$ liradır.

a. Marjinal maliyet $C'(x)$ ifadesini bulunuz.

b. $x = 20$ iken marjinal maliyeti bulunuz ve 21. ürünün gerçek ek maliyeti olan $C(21) - C(20)$ ile karşılaştırınız.

ertansinansahin.com

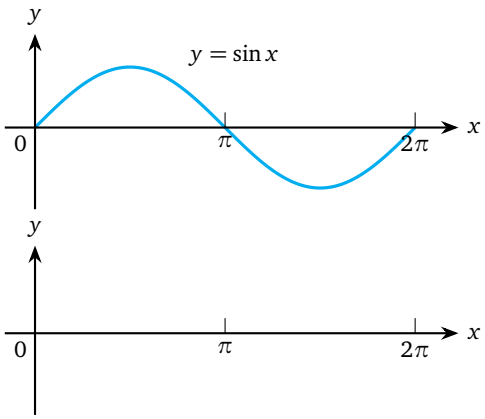
Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri

Ünite 1'deki iki trigonometrik limiti kullanarak $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarının türevlerini bulalım.

TEOREM: x radyan cinsinden ölçülmek üzere

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x, \qquad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

eşitlikleri geçerlidir.



ÖRNEK 20: Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a. $y = 2x^3 + 4\cos x - 7$

b. $y = x^3 \sin x$

c. $y = \dfrac{\cos x}{x^2}$

Basit harmonik hareket

Bir örnek üzerinden, yaya bağlı bir kütlenin ivmesinin konumuyla nasıl ilişkili olduğunu inceleyelim.

ÖRNEK 21: Bir yaya bağlı kütle, denge konumu etrafında salınmaktadır. Kütlenin t saniye sonraki konumu $s(t) = 8\sin t$ santimetredir.

a. $v(t)$ ve $a(t)$ ifadelerini bulunuz.

b. $t = \pi/2$ anında kütlenin konumunu, hızını ve ivmesini bulunuz.

Diğer dört trigonometrik fonksiyon

Tanjant, kotanjant, sekant ve kosekant fonksiyonlarının türevlerini sinüs ve kosinüsün türevlerinden çıkaralım.

TEOREM: Tanımlı oldukları her x için

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x, \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x, \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

eşitlikleri geçerlidir.

ÖRNEK 22: Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a. $y = 3\sec x - 2\cot x$ b. $y = e^x \sec x$

Zincir Kuralı

Şimdiye kadarki kurallarla $\sin(x^2 - 4)$ gibi bileşke fonksiyonların türevini alamıyoruz. Bunun için yeni bir kural çıkaralım.

ertansinansahin.com

Bir örnek üzerinden, bileşke bir fonksiyonda türevlerin nasıl bir araya geldiğini inceleyelim.

ÖRNEK 23: $y = 4u$ ve $u = 3x$ olsun. Aşağıdaki türevleri bulup aralarındaki ilişkiyi inceleyiniz.

$$\frac{dy}{du}, \quad \frac{du}{dx}, \quad \frac{dy}{dx}$$

Bileşke fonksiyonların türevini veren kuralı yazalım.

TEOREM: $y = f(u)$ ve $u = g(x)$ türevlenebilir fonksiyonlar ise bileşke $y = f(g(x))$ de türevlenebilirdir ve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

olur. Aynı kural şöyle de yazılır:

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

ÖRNEK 24: Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini zincir kuralını kullanarak bulunuz.

a. $y = e^{x^2}$

b. $y = \cos(5x + 2)$

c. $y = \tan\left(x^2\right)$

ertansinansahin.com

Zincir kuralının tekrarlı kullanımı

Bir örnek üzerinden, iç içe ikiden fazla fonksiyon olduğunda zincir kuralını arka arkaya nasıl uyguladığımızı görelim.

ÖRNEK 25: $y = \cos\left(e^{3x}\right)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Bir fonksiyonun kuvveti

Bir fonksiyonun kuvvetinin türevi için zincir kuralının özel bir biçimini yazalım.

TEOREM: u, x'in türevlenebilir bir fonksiyonu ve n bir gerçel sayı ise

$$\frac{d}{dx}(u^n) = n\,u^{n-1}\,\frac{du}{dx}$$

olur.

ÖRNEK 26: Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a. $y = (x^3 - 2x)^5$

c. $y = \sqrt{x^2 + 9}$

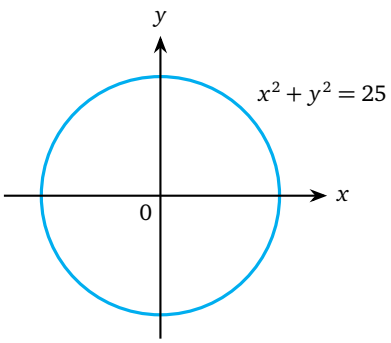
b. $y = \dfrac{1}{(4x+3)^2}$

ÖRNEK 27: Aşağıdaki fonksiyonun türevini bulunuz.

$$y = x\,e^{-x^2}$$

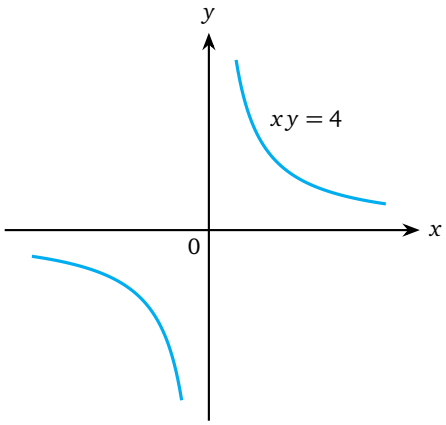
Kapalı Fonksiyonun Türevi

Bazı denklemlerde y'yi x cinsinden açıkça yazamayız ya da denklem tek bir fonksiyon tanımlamaz. Bu durumlarda türevin nasıl bulunacağını inceleyelim.



Bir örnek üzerinden, aynı türevi önce y'yi çözerek, sonra çözmeden bulalım.

ÖRNEK 28: $xy = 4$ denklemi için y' türevini iki yolla bulunuz: (i) y'yi x cinsinden çözerek, (ii) denklemin iki tarafını x'e göre türeterek.



Denklemin iki tarafını türetirken y içeren terimlere nasıl davranacağımızı yazalım.

NOT: Kapalı türev almada y, x'in bir fonksiyonu sayılır; y içeren terimler zincir kuralıyla türetilir. Örneğin

$$\frac{d}{dx}(y^2) = 2y\,\frac{dy}{dx}$$

ÖRNEK 29: Aşağıdaki denklemlerle kapalı olarak tanımlanan y için y' türevini bulunuz.

a. $y^3 + xy = 8$

b. $x^2 + y^2 = e^x$

ertansinansahin.com

İkinci türev

Bir örnek üzerinden, kapalı olarak tanımlanan bir fonksiyonun ikinci türevinin nasıl bulunduğunu görelim.

ÖRNEK 30: $x^2 - y^2 = 4$ denklemiyle kapalı olarak tanımlanan y için y' ve y'' türevlerini bulunuz.

Teğet ve normal doğrular

Bir örnek üzerinden, kapalı bir eğrinin bir noktadaki teğet ve normal doğrularının nasıl bulunduğunu görelim.

ÖRNEK 31: $(1, 1)$ noktasının $x^2y + y^3 = 2$ eğrisi üzerinde olduğunu gösteriniz.

a. Bu noktada eğrinin teğet doğrusunun denklemini bulunuz.

b. Bu noktada eğrinin normal doğrusunun denklemini bulunuz.

ertansinansahin.com

Ters ve Logaritma Fonksiyonlarının Türevi

Bir fonksiyonun ve tersinin eğimleri arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

TEOREM: f birebir ve türevlenebilir bir fonksiyon, $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$ ise f^{-1} fonksiyonu b noktasında türevlenebilirdir ve

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$$

olur.

ÖRNEK 32: $f(x) = 2x^3 + x$ fonksiyonu birebirdir. $(f^{-1})'(3)$ değerini bulunuz.

Doğal logaritmanın türevi

Üstel fonksiyonun tersi olan $\ln x$ fonksiyonunun türevini bulalım.

TEOREM: $x > 0$ için

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

olur. u, x'in türevlenebilir ve pozitif bir fonksiyonu ise zincir kuralıyla

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

elde edilir.

ÖRNEK 33: Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a. $y = \ln\left(3x^2 + 1\right)$

b. $y = x \ln x$

c. $y = \ln(\sin x)$

a^x ve $\log_a x$ fonksiyonlarının türevi

Tabanı e olmayan üstel ve logaritma fonksiyonlarının türevlerini bulalım.

TEOREM: $a > 0$, $a \neq 1$ olmak üzere

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a, \qquad \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

eşitlikleri geçerlidir.

ÖRNEK 34: Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a. $y = 2^{x^2}$

b. $y = \log_5(x^2 + 1)$

c. $y = x \cdot 3^x$

Logaritmik türev alma

Bir örnek üzerinden, çok sayıda çarpan, bölüm ve kuvvet içeren fonksiyonları iki tarafın logaritmasını alarak nasıl türettiğimizi görelim.

ÖRNEK 35: $x > 3$ için aşağıdaki fonksiyonun türevini logaritmik türev alma yöntemiyle bulunuz.

$$y = \frac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-3)^3}$$

ÖRNEK 36: $x > 0$ için $y = x^{\sin x}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Genel kuvvet kuralı

Türev Alma Kuralları bölümünde kabul ettiğimiz kuvvet kuralını her gerçel üs için ispatlayalım.

TANIM: $x > 0$ ve n herhangi bir gerçel sayı için x'in n-inci kuvveti

$$x^n = e^{n \ln x}$$

ile tanımlanır.

ertansinansahin.com

Üstel fonksiyonun ve logaritmanın türevinden e sayısını bir limit olarak yazalım.

TEOREM: e sayısı

$$e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$$

limitiyle hesaplanır.

Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

Ters fonksiyonun türevi kuralından, arcsin, arctan ve arcsec fonksiyonlarının türevlerini çıkaralım.

TEOREM: Tanımlı oldukları her x için

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x|<1)$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad (|x|>1)$$

eşitlikleri geçerlidir.

ÖRNEK 37: Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a. $y = \arcsin(5x)$

b. $y = \arctan(e^x)$

c. $y = \operatorname{arcsec}(x^2),\ x>1$

ÖRNEK 38: Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a. $y = \arctan\sqrt{x}$

b. $y = x\arcsin x$

ertansinansahin.com

Diğer üç ters trigonometrik fonksiyon

arccos, arccot ve arccsc fonksiyonlarının türevlerini, ters kofonksiyon özdeşliklerinden çıkaralım.

TEOREM: Ters kofonksiyon özdeşlikleri

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x, \qquad \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

$$\operatorname{arccsc} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsec} x$$

olduğundan, türevleri karşılık gelen fonksiyonların türevlerinin eksisidir:

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

İlişkili Değişim Oranları

Bir örnek üzerinden, birbirine bağlı iki niceliğin değişim hızlarının nasıl ilişkili olduğunu görelim.

ÖRNEK 39: Küresel bir balon, dakikada 100π cm^3 sabit hızla şişirilmektedir. Yarıçap 5 cm iken yarıçapın artış hızını bulunuz.

Bu tür problemlerin çözüm adımlarını yazalım.

NOT: İlişkili değişim oranları problemlerinde şu adımlar izlenir: (1) Şekil çizilir ve değişkenler adlandırılır. (2) Değişkenler arasındaki ilişki yazılır. (3) İlişkinin iki tarafı t'ye göre türetilir (zincir kuralı). (4) Bilinen değerler **türevden sonra** yerine konur ve istenen hız bulunur.

ÖRNEK 40: Boyu 1.8 m olan bir kişi, yerden 6 m yükseklikteki bir lambanın direğinden 1.5 m/s hızla uzaklaşmaktadır.

a. Gölgesinin ucu ne hızla hareket etmektedir?

b. Gölgesinin uzunluğu ne hızla artmaktadır?

ertansinansahin.com

ÖRNEK 41: Bir dikdörtgenin uzun kenarı 3 cm/s hızla artarken kısa kenarı 2 cm/s hızla azalmaktadır. Uzun kenar 10 cm, kısa kenar 6 cm iken aşağıdakilerin değişim hızlarını bulunuz.

a. Dikdörtgenin alanı

b. Dikdörtgenin çevresi

ÖRNEK 42: Bir nokta, $x^2 + y^2 = 25$ çemberi üzerinde hareket etmektedir. Nokta $(3, 4)$'teyken x koordinatı saniyede 2 birim artmaktadır. Aynı anda y koordinatı hangi hızla değişmektedir?

Lineerleştirme ve Diferansiyeller

Bir örnek üzerinden, bir fonksiyonun değerini bir noktanın yakınında teğet doğrusuyla nasıl yaklaşık hesaplayabileceğimizi görelim.

ÖRNEK 43: $f(x) = 1/x$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemini $L(x)$ olarak yazınız. Bu doğruyu kullanarak $1/2.05$ değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

Bu yaklaşımı bir tanım olarak yazalım.

TANIM: f, $x = a$ noktasında türevlenebilir ise

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

fonksiyonuna f'nin a noktasındaki **lineerleştirmesi** denir. a noktasına yaklaşımın **merkezi** denir ve x, a'ya yakın iken

$$f(x) \approx L(x)$$

yaklaşımı geçerlidir.

ÖRNEK 44: $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $x = 4$ noktasındaki lineerleştirmesini bulunuz ve bunu kullanarak $\sqrt{4.1}$ değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

Diferansiyeller

Türevi, x'teki küçük bir değişimin y'de yaratacağı değişimi tahmin etmek için kullanalım.

TANIM: $y = f(x)$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. dx bağımsız bir değişkendir; y'nin **diferansiyeli** ise

$$dy = f'(x)\,dx$$

ile tanımlanır. $dx = \Delta x$ küçük iken $\Delta y \approx dy$ olur.

ÖRNEK 45: $y = x \ln x$ fonksiyonunun dy diferansiyelini bulunuz. $x = 1$ ve $dx = 0.2$ iken dy değerini hesaplayınız.

ertansinansahin.com

Diferansiyelle tahmin

Bir örnek üzerinden, diferansiyel kullanarak bir değerin nasıl yaklaşık hesaplandığını görelim.

ÖRNEK 46: $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonunu $a=25$ merkezli ve $dx=1$ alarak kullanıp $\sqrt{26}$ değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

ÖRNEK 47: Bir silindirin yüksekliği 20 cm ve yarıçapı 5 cm olarak ölçülmüştür. Yarıçap ölçümündeki hata en fazla 0.2 cm'dir. Diferansiyel kullanarak hacim hesabındaki tahmini hatayı ve yüzde hatayı bulunuz.

ertansinansahin.com

Alıştırmalar ve Problemler

1. Aşağıdaki fonksiyonun türevini türevin tanımını kullanarak bulunuz. Ardından $x=2$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemini yazınız.

$$f(x)=\frac{3}{x+1}$$

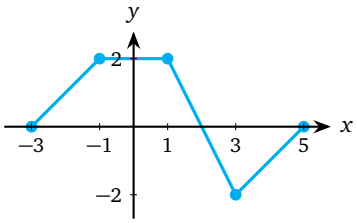
2. Aşağıdaki fonksiyonun $x=1$ noktasında türevlenebilir olması için a ve b sabitlerinin alması gereken değerleri bulunuz.

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & x\leq 1 \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$$

3. Aşağıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Grafiğe bakarak aşağıdakileri bulunuz.

a. $f'(-2)$, $f'(0)$, $f'(2)$ ve $f'(4)$ değerlerini bulunuz.

b. f fonksiyonunun türevlenebilir olmadığı noktaları bulunuz.



4. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a. $y = \sin^3(2x)$

b. $y = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$, $x > 1$

5. $x^2 - xy + y^2 = 3$ eğrisinin yatay teğet doğrularının bulunduğu noktaları bulunuz.

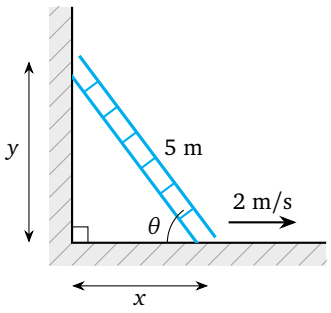
6. $x > 0$ için $y = x^{x^2}$ fonksiyonunun türevini bulunuz ve $y'(1)$ değerini hesaplayınız.

7. $x > 0$ için $f(x) = \arctan x + \arctan(1/x)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

8. Boyu 5 m olan bir merdiven, düşey bir duvara dayalıdır. Merdivenin alt ucu yerde, duvardan uzaklaşacak biçimde 2 m/s hızla kaymaktadır. Alt uç duvardan 3 m uzakta iken aşağıdakileri bulunuz.

a. Merdivenin üst ucu duvar boyunca ne hızla aşağı kaymaktadır?

b. Merdivenin yerle yaptığı θ açısı ne hızla değişmektedir?



9. $f(x) = e^x$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki lineerleştirmesini bulunuz ve bunu kullanarak $e^{0.05}$ değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

ertansinansahin.com

Cevaplar

Örnek sorular

1 $f'(1)=4,\quad y=4x-2$

2 $f'(1)=\frac{1}{2}$

3 a. 10 m/s (yükseliyor) b. -10 m/s (düşüyor)

4 $f'(x)=3x^2;\quad 3,\quad 0,\quad 12$

5 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad f'(9)=\frac{1}{6}$

6 $f'(\pm1)=0;\quad (-1,1)$ aralığında $f'<0$

7 $1,\quad -1;$ türevlenebilir değildir

8 türevlenebilirdir, $f'(1)=2$

9 Türevlenebilir değildir; f, $x=1$'de süreksizdir.

10 a. $5x^4$ b. $-\frac{3}{x^4}$ c. $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ d. $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

11 $\frac{dy}{dx}=x^3-6x^2+7$

12 $f'(x)=2e^x-10x;\quad f'(0)=2$

13 $(fg)'(x)=5x^4,\quad f'(x)g'(x)=6x^3;$ eşit değildir

14 $y'=5x^4+6x^2-8$

15 $y'=\frac{x(x+6)}{(x+3)^2}$

16 $-\frac{1}{x^2},\quad \frac{2}{x^3},\quad -\frac{6}{x^4},\quad \frac{24}{x^5}$

17 $\frac{dS}{dr}=8\pi r;\quad 24\pi$ m^2/m

18
a. $v(t)=3t^2-18t+24,\quad a(t)=6t-18$

b. $t=2$ ve $t=4$

c. $t=1$: sürat azalıyor; $t=5$: sürat artıyor

19
a. $C'(x)=10+2x$

b. $C'(20)=50$ lira, $C(21)-C(20)=51$ lira

20
a. $6x^2-4\sin x$ b. $3x^2\sin x+x^3\cos x$

c. $-\frac{x\sin x+2\cos x}{x^3}$

21
a. $v(t)=8\cos t,\quad a(t)=-8\sin t$

b. $s=8$ cm, $v=0$, $a=-8$ cm/s^2

22 a. $3\sec x\tan x+2\csc^2 x$ b. $e^x\sec x\,(1+\tan x)$

23 $\frac{dy}{du}=4,\quad \frac{du}{dx}=3,\quad \frac{dy}{dx}=12=4\cdot3$

24 a. $2x\,e^{x^2}$ b. $-5\sin(5x+2)$ c. $2x\sec^2(x^2)$

25 $y'=-3e^{3x}\sin\left(e^{3x}\right)$

26 a. $5(x^3-2x)^4(3x^2-2)$ b. $-\frac{8}{(4x+3)^3}$ c. $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

27 $y'=(1-2x^2)\,e^{-x^2}$

28 i. $y'=-\frac{4}{x^2}$ ii. $y'=-\frac{y}{x}$

29 a. $-\frac{y}{3y^2+x}$ b. $\frac{e^x-2x}{2y}$

30 $y'=\frac{x}{y},\quad y''=-\frac{4}{y^3}$

31 a. $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ b. $y=2x-1$

32 $\frac{1}{7}$

33 a. $\frac{6x}{3x^2+1}$ b. $\ln x+1$ c. $\cot x$

34 a. $2x\cdot2^{x^2}\ln2$ b. $\frac{2x}{(x^2+1)\ln5}$ c. $3^x\,(1+x\ln3)$

35 $y'=\frac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-3)^3}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{3}{x-3}\right)$

36 $y'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$

37 a. $\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$ b. $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$ c. $\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$

38 a. $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$ b. $\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

39 $\frac{dr}{dt}=1$ cm/dk

40 a. $\frac{15}{7}$ m/s b. $\frac{9}{14}$ m/s

41 a. -2 cm^2/s b. 2 cm/s

42 $\frac{dy}{dt}=-\frac{3}{2}$ birim/s (azalıyor)

43 $L(x)=\frac{1}{2}-\frac{x-2}{4};\quad L(2.05)=0.4875$

44 $L(x)=\frac{x}{4}+1;\quad \sqrt{4.1}\approx2.025$

45 $dy=(\ln x+1)\,dx;\quad dy=0.2$

46 $\sqrt{26}\approx5.1$

47 40π cm^3, %8

Alıştırmalar ve problemler

1 $f'(x)=-\frac{3}{(x+1)^2}\qquad y=-\frac{x}{3}+\frac{5}{3}$

ertansinansahin.com

2 $a = 3, \quad b = -2$

3 a. $1, \quad 0, \quad -2, \quad 1$ b. $x = -1, \quad x = 1, \quad x = 3$

4 a. $6\sin^2(2x)\cos(2x)$ b. $-\frac{2}{x^2-1}$

5 $(1,2)$ ve $(-1,-2)$

6 $y' = x^{x^2}(2x\ln x + x); \quad y'(1) = 1$

7 $f'(x) = 0$

8 a. $\frac{3}{2}$ m/s b. $-\frac{1}{2}$ rad/s

9 $L(x) = 1 + x; \quad e^{0.05} \approx 1.05$

ertansinansahin.com

3. ÜNİTE
TÜREV UYGULAMALARI

video izle

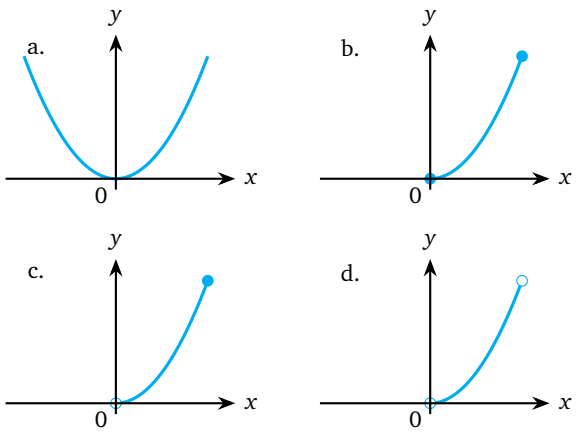
Kapalı Aralıklarda Fonksiyonların Ekstremum Değerleri

Bir fonksiyonun bir aralıkta aldığı en büyük ve en küçük değerleri türev yardımıyla nasıl bulacağımızı inceleyelim. Önce bu değerleri tanımlayalım.

TANIM: f fonksiyonunun tanım kümesi D ve $c \in D$ olsun. Her $x \in D$ için $f(x) \leq f(c)$ oluyorsa f fonksiyonunun D üzerinde c noktasında bir **mutlak maksimum** değeri vardır; her $x \in D$ için $f(x) \geq f(c)$ oluyorsa c noktasında bir **mutlak minimum** değeri vardır. Maksimum ve minimum değerlere f fonksiyonunun **ekstremum değerleri** denir.

ÖRNEK 1: Aşağıda $y = x^2$ fonksiyonunun grafiği dört farklı tanım kümesi üzerinde verilmiştir. Her birinde fonksiyonun, varsa, mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

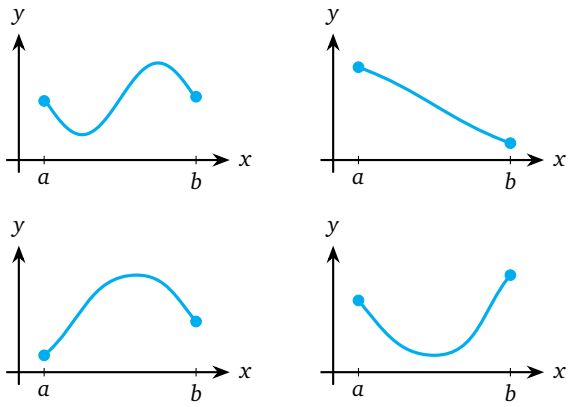
a. $(-\infty, \infty)$
b. $[0,3]$
c. $(0,3]$
d. $(0,3)$



ertansinansahin.com

Kapalı aralıkta sürekli bir fonksiyonun ekstremum değerlerinin var olduğunu söyleyen uç değer teoremini ifade edelim.

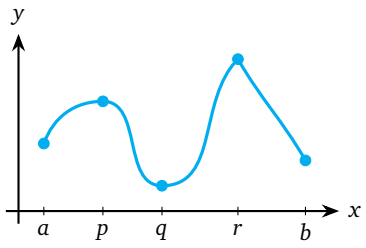
TEOREM: f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ise f, bu aralıkta bir mutlak maksimum değeri M ve bir mutlak minimum değeri m alır; yani $f(x_1) = m$ ve $f(x_2) = M$ olan $x_1, x_2 \in [a,b]$ noktaları vardır ve her $x \in [a,b]$ için $m \leq f(x) \leq M$ olur.



Bir fonksiyonun yalnızca bir noktanın yakınında en büyük ya da en küçük değeri almasını da tanımlayalım.

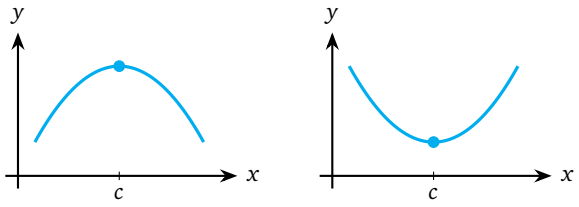
TANIM: f fonksiyonunun tanım kümesi D ve $c \in D$ olsun. c noktasını içeren bir açık aralıktaki her $x \in D$ için $f(x) \leq f(c)$ oluyorsa f fonksiyonunun c noktasında bir **yerel maksimum** değeri vardır; bu aralıktaki her $x \in D$ için $f(x) \geq f(c)$ oluyorsa c noktasında bir **yerel minimum** değeri vardır.

ÖRNEK 2: Aşağıda $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sürekli bir f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Mutlak maksimum, mutlak minimum, yerel maksimum ve yerel minimum değerlerinin alındığı noktaları belirleyiniz.



Bir fonksiyon yerel ekstremum değerini bir iç noktada alıyorsa türevinin o noktada ne olması gerektiğini inceleyelim.

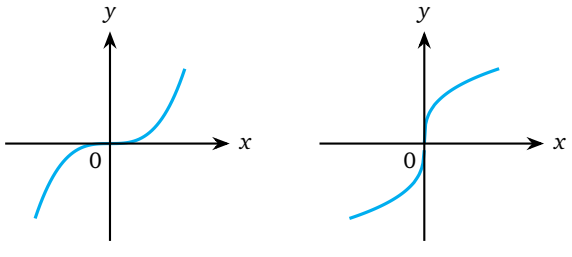
TEOREM: f fonksiyonu tanım kümesinin bir c iç noktasında yerel maksimum ya da yerel minimum değerini alıyorsa ve $f'(c)$ varsa $f'(c) = 0$ olur.



Yerel ekstremum değerinin alınabileceği noktaları bir ad altında toplayalım.

TANIM: f fonksiyonunun tanım kümesinin bir c iç noktasında $f'(c) = 0$ ise ya da $f'(c)$ yoksa c noktasına f fonksiyonunun bir **kritik noktası** denir.

Her kritik noktada yerel ekstremum değeri alınıp alınmadığını aşağıdaki iki grafik üzerinden tartışalım.



ÖRNEK 3: Aşağıdaki fonksiyonların kritik noktalarını bulunuz.

a. $f(x) = x^4 - 4x^3$

b. $g(x) = x^2 e^{-x}$

c. $h(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

Kapalı bir aralıkta sürekli bir fonksiyonun mutlak ekstremum değerlerini bulma yöntemini yazalım.

NOT: f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli iken mutlak ekstremum değerleri şu adımlarla bulunur:

1. (a, b) aralığındaki kritik noktalar bulunur.
2. f fonksiyonunun kritik noktalardaki ve a, b uç noktalarındaki değerleri hesaplanır.
3. Bu değerlerin en büyüğü mutlak maksimum, en küçüğü mutlak minimum değeridir.

ÖRNEK 4: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ fonksiyonunun $[0, 4]$ aralığındaki mutlak ekstremum değerlerini ve alındıkları noktaları bulunuz.

ÖRNEK 5: $f(x) = x - 2\ln x$ fonksiyonunun $[1, 4]$ aralığındaki mutlak ekstremum değerlerini ve alındıkları noktaları bulunuz.

ertansinansahin.com

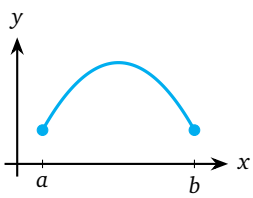
ÖRNEK 6: $f(x) = x + 2\cos x$ fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığındaki mutlak ekstremum değerlerini ve alındıkları noktaları bulunuz.

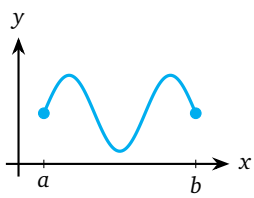
ÖRNEK 7: $f(x) = |x^2 - 4|$ fonksiyonunun $[-3, 3]$ aralığındaki mutlak ve yerel ekstremum değerlerini, alındıkları noktalarla birlikte bulunuz.

Ortalama Değer Teoremi

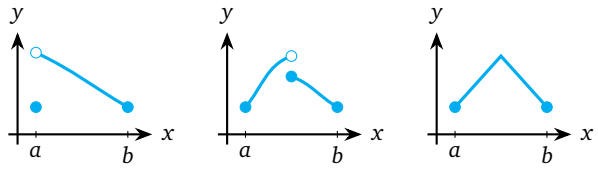
Önce Rolle teoremini ifade edelim.

TEOREM: $y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve (a, b) açık aralığında türevlenebilir olsun. $f(a) = f(b)$ ise $f'(c) = 0$ olacak biçimde en az bir $c \in (a, b)$ sayısı vardır.





Rolle teoreminin şartlarından biri sağlanmazsa yatay teğetin bulunmayabileceğini aşağıdaki üç grafik üzerinden tartışalım.



ÖRNEK 8: $2x - \cos x = 0$ denkleminin tam olarak bir gerçel çözümü olduğunu gösteriniz.

ÖRNEK 9: $f(x) = x^3 - 4x$ fonksiyonunun $[-2, 2]$ aralığında Rolle teoreminin şartlarını sağladığını gösteriniz ve teoremin sonucundaki c değerlerini bulunuz.

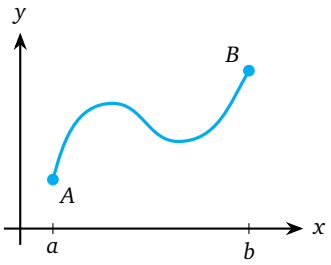
ertansinansahin.com

Rolle teoreminin bir genellemesi olan ortalama değer teoremini ifade edelim.

TEOREM: $y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve (a, b) açık aralığında türevlenebilir ise

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

olacak biçimde en az bir $c \in (a, b)$ sayısı vardır.



ÖRNEK 10: $f(x) = x^3$ fonksiyonu için $[1, 3]$ aralığında ortalama değer teoreminin sonucundaki c değerini bulunuz.

Bir örnek üzerinden, ortalama değişim hızı ile anlık değişim hızı arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

ÖRNEK 11: Bir bitkinin boyu 20 günde 5 cm'den 45 cm'e çıkmıştır. Bitkinin boyunun zamanın sürekli ve türevlenebilir bir fonksiyonu olduğunu varsayarak, bu süre içinde büyüme hızının tam olarak 2 cm/gün olduğu bir an bulunduğunu gösteriniz.

Ortalama değer teoreminin sonuçları

Ortalama değer teoreminin iki sonucunu yazalım.

TEOREM: Her $x \in (a, b)$ için $f'(x) = 0$ ise (a, b) aralığında $f(x) = C$ olan bir C sabiti vardır.

TEOREM: Her $x \in (a, b)$ için $f'(x) = g'(x)$ ise (a, b) aralığında $f(x) = g(x) + C$ olan bir C sabiti vardır.

ÖRNEK 12: $x > 0$ için $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ fonksiyonunun sabit olduğunu gösteriniz ve bu sabiti bulunuz.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 13: Türevi $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x$ $(x > 0)$ olan ve grafiği $(1, 3)$ noktasından geçen f fonksiyonunu bulunuz.

Bir örnek üzerinden, bir cismin ivmesinden hız ve konum fonksiyonlarını nasıl bulduğumuzu görelim.

ÖRNEK 14: Doğrusal hareket eden bir cismin ivmesi $a(t) = (6t - 4)$ m/s^2'dir. $v(0) = 2$ m/s ve $s(0) = 1$ m ise cismin $v(t)$ ve $s(t)$ fonksiyonlarını bulunuz.

Ortalama değer teoremi eşitsizlik kanıtlamada da kullanılır.

ÖRNEK 15: $x > 0$ için $\ln(1 + x) < x$ olduğunu gösteriniz.

ertansinansahin.com

Monoton Fonksiyonlar ve Birinci Türev Testi

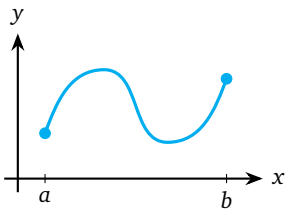
Bir fonksiyonun bir aralıkta kesin arttığını ya da kesin azaldığını tanımlayalım.

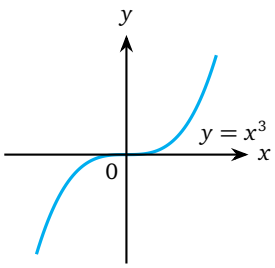
TANIM: f fonksiyonu bir I aralığında tanımlı olsun. I içindeki her $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde **kesin artan**, her $x_1 < x_2$ için $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa **kesin azalan** denir. Kesin artan ya da kesin azalan bir fonksiyona I üzerinde **kesin monoton** denir.

NOT: Bazı kaynaklarda "monoton artan" ifadesi $x_1 < x_2$ için $f(x_1) \leq f(x_2)$ olan (azalmayan) fonksiyonlar için kullanılır; bu tanıma göre sabit fonksiyon da monoton artandır. Biz bu derste "artan" ve "azalan" sözcüklerini tek başına kullanmayıp her zaman **kesin** artan, **kesin** azalan diyeceğiz.

Türevin işaretinin fonksiyonun kesin artan ya da kesin azalan olmasını nasıl belirlediğini ifade edelim.

TEOREM: f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevlenebilir olsun. Her $x \in (a, b)$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde kesin artandır; her $x \in (a, b)$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde kesin azalandır.





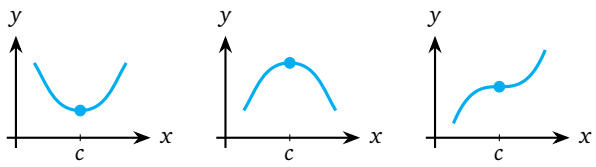
NOT: $f'(x) \geq 0$ (ya da $f'(x) \leq 0$) olup f' yalnız sonlu sayıda noktada sıfır oluyorsa f yine kesin artandır (kesin azalan için de benzer); örneğin $f(x) = x^3$.

ÖRNEK 16: $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve hangi açık aralıklarda kesin artan, hangi açık aralıklarda kesin azalan olduğunu belirleyiniz.

Kritik bir noktada türevin işaret değiştirip değiştirmediğine bakarak yerel ekstremum değerlerini sınıflandıralım.

TEOREM: f sürekli bir fonksiyon ve c, f fonksiyonunun bir kritik noktası olsun; ayrıca f, c noktasını içeren bir aralığın c dışındaki her noktasında türevlenebilir olsun. Soldan sağa gidildiğinde

1. f' negatiften pozitife geçiyorsa f fonksiyonunun c noktasında bir yerel minimum değeri vardır,
2. f' pozitiften negatife geçiyorsa f fonksiyonunun c noktasında bir yerel maksimum değeri vardır,
3. f' işaret değiştirmiyorsa f fonksiyonunun c noktasında yerel ekstremum değeri yoktur.



NOT: Tanım kümesinin bir uç noktasında yalnızca bir taraf vardır; f' uç noktaya yakın tarafta negatifse sağ uçta yerel minimum, pozitifse yerel maksimum vardır (sol uçta tersi).

ertansinansahin.com

ÖRNEK 17: $f(x) = \sqrt{x}\,(x-3)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ tanım kümesinde veriliyor.

a. Kritik noktalarını bulunuz.
b. Kesin artan ve kesin azalan olduğu açık aralıkları belirleyiniz.
c. Yerel ve mutlak ekstremum değerlerini bulunuz.

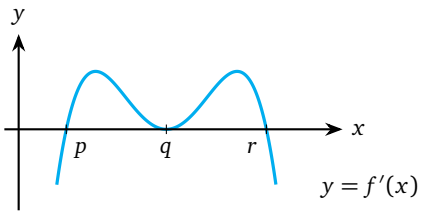
ÖRNEK 18: $f(x) = x^2 e^{-x}$ fonksiyonu için aşağıdakileri bulunuz.

a. Kesin artan ve kesin azalan olduğu açık aralıkları.
b. Yerel ve mutlak ekstremum değerlerini.

ÖRNEK 19: $f(x) = x^5 - 5x^3$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve her birinde yerel ekstremum değeri alınıp alınmadığını birinci türev testiyle belirleyiniz.

Bir örnek üzerinden, bir fonksiyonun türevinin grafiğinden fonksiyonun kesin artan ve kesin azalan olduğu aralıkları nasıl okuduğumuzu görelim.

ÖRNEK 20: Aşağıda türevlenebilir bir f fonksiyonunun türevi f' fonksiyonunun grafiği verilmiştir. f fonksiyonunun kesin artan ve kesin azalan olduğu açık aralıkları ve yerel ekstremum noktalarını belirleyiniz.

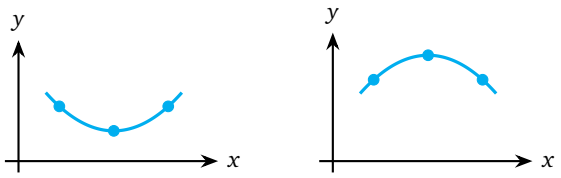


ertansinansahin.com

Konkavlık ve Eğri Çizimi

Bir fonksiyonun grafiğinin hangi yöne eğildiğini türev yardımıyla inceleyelim. Önce konkavlığı tanımlayalım.

TANIM: f türevlenebilir bir fonksiyon ve I bir açık aralık olsun. f' fonksiyonu I üzerinde kesin artan ise f fonksiyonunun grafiğine I üzerinde **yukarı konkav**, f' fonksiyonu I üzerinde kesin azalan ise **aşağı konkav** denir.



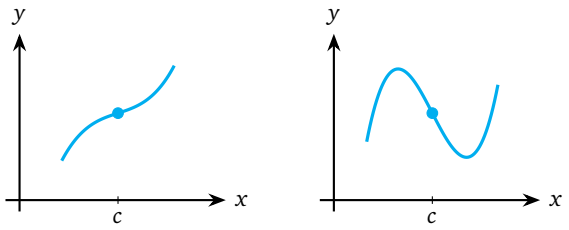
Konkavlığı ikinci türevin işaretinden de belirleyebiliriz.

TEOREM: f fonksiyonu I açık aralığında iki kez türevlenebilir olsun. Her $x \in I$ için $f''(x) > 0$ ise f fonksiyonunun grafiği I üzerinde yukarı konkavdır; her $x \in I$ için $f''(x) < 0$ ise aşağı konkavdır.

ÖRNEK 21: $f(x) = x^4 - 6x^2$ fonksiyonunun grafiğinin yukarı konkav ve aşağı konkav olduğu açık aralıkları belirleyiniz.

Konkavlığın değiştiği noktaları tanımlayalım.

TANIM: f fonksiyonunun grafiğinin $(c, f(c))$ noktasında bir teğeti varsa ve konkavlık bu noktada değişiyorsa $(c, f(c))$ noktasına grafiğin bir **bükülme noktası** denir.



ÖRNEK 22: Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerinin orijinde $(0,0)$ bükülme noktası olup olmadığını belirleyiniz.

a. $f(x) = x^5$

b. $f(x) = x^6$

c. $f(x) = x^{4/3}$

İkinci türevi, kritik noktalarda yerel ekstremum değerlerini sınıflandırmak için de kullanabiliriz.

TEOREM: f'' fonksiyonu c noktasını içeren bir açık aralıkta sürekli olsun.

1. $f'(c) = 0$ ve $f''(c) < 0$ ise f fonksiyonunun c noktasında bir yerel maksimum değeri vardır,
2. $f'(c) = 0$ ve $f''(c) > 0$ ise f fonksiyonunun c noktasında bir yerel minimum değeri vardır,
3. $f'(c) = 0$ ve $f''(c) = 0$ ise test sonuç vermez; f fonksiyonu c noktasında yerel maksimum ya da yerel minimum değeri alabilir, hiçbir ekstremum değeri de almayabilir.

ÖRNEK 23: Aşağıdaki fonksiyonların kritik noktalarını ikinci türev testiyle sınıflandırınız. Test sonuç vermiyorsa birinci türev testini kullanınız.

a. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

b. $f(x) = x^5 - 5x^3$

ertansinansahin.com

Şimdiye kadar öğrendiklerimizi birleştirerek bir fonksiyonun grafiğini çizelim.

NOT: $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği şu adımlarla çizilir:

1. Tanım kümesi bulunur, simetriye bakılır.
2. f' ve f'' türevleri bulunur.
3. Kritik noktalar bulunur ve her birinde fonksiyonun davranışı belirlenir.
4. Fonksiyonun kesin artan ve kesin azalan olduğu aralıklar bulunur.
5. Bükülme noktaları bulunur ve konkavlık belirlenir.
6. Asimptotlar bulunur.
7. Eksenleri kestiği noktalar ve yukarıda bulunan noktalar işaretlenerek grafik çizilir.

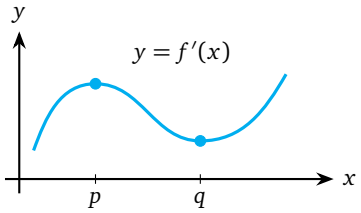
ÖRNEK 24: $f(x) = x^4 - 4x^3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz; ekstremum değerlerini, bükülme noktalarını ve asimptotlarını belirtiniz.

ÖRNEK 25: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz; ekstremum değerlerini, bükülme noktalarını ve asimptotlarını belirtiniz.

ertansinansahin.com

Türevin grafiğinden fonksiyonun konkavlığını nasıl okuyacağımızı görelim.

ÖRNEK 26: Aşağıda türevlenebilir bir f fonksiyonunun türevi f' fonksiyonunun grafiği verilmiştir. f fonksiyonunun grafiğinin yukarı konkav ve aşağı konkav olduğu açık aralıkları ve bükülme noktalarını belirleyiniz. Grafiğin gösterildiği biçimde her iki yönde devam ettiğini kabul ediniz.



Belirsiz Biçimler ve L'Hospital Kuralı

Pay ve paydası birlikte sıfıra ya da sonsuza giden oranların limitlerini türev yardımıyla nasıl bulacağımızı inceleyelim. Önce bu limitleri adlandıralım.

TANIM: $x \to a$ iken $f(x)$ ve $g(x)$ ikisi de 0'a gidiyorsa

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

limiti $\frac{0}{0}$ **belirsiz biçimindedir**; ikisinin de mutlak değeri $+\infty$'a gidiyorsa (her biri $+\infty$ ya da $-\infty$ olabilir) $\frac{\infty}{\infty}$ belirsiz biçimindedir. Tanımda a yerine a^+, a^-, $+\infty$ ya da $-\infty$ de olabilir.

Bu biçimlerdeki limitleri türevlerin oranına dönüştüren kuralı ifade edelim.

TEOREM: L'Hospital Kuralı. a noktasını içeren bir açık aralıkta, a dışındaki her noktada f ve g türevlenebilir olsun ve bu noktalarda $g'(x) \neq 0$ olsun.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

limiti $\frac{0}{0}$ ya da $\frac{\infty}{\infty}$ belirsiz biçimindeyse ve

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

limiti varsa ($\pm\infty$ olabilir)

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olur. Kural $x \to a^{\pm}$ ve $x \to \pm\infty$ için de geçerlidir (aralık uygun biçimde alınır).

NOT: Pay ve paydanın türevleri **ayrı ayrı** alınır; oranın türevi $\left(\frac{f}{g}\right)'$ alınmaz. Kural yalnız $\frac{0}{0}$ ve $\frac{\infty}{\infty}$ biçiminde uygulanır; her adımda biçimi yeniden denetle.

ÖRNEK 27: Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$

c. $\lim_{x\to 0} \frac{x-\arctan x}{x^3}$

b. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

ÖRNEK 28: Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

c. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}$

b. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x}$

Diğer belirsiz biçimleri oran biçimine getirelim.

NOT: $\lim_{x\to a} f(x)\,g(x)$ limiti $0\cdot\infty$ biçimindeyse $f\cdot g = \frac{f}{1/g}$ yazılarak, $\lim_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big)$ limiti $\infty-\infty$ biçimindeyse ortak payda alınarak $\frac{0}{0}$ ya da $\frac{\infty}{\infty}$ biçimine getirilir.

ÖRNEK 29: Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{x\to\infty} x\left(e^{1/x}-1\right)$

b. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

ertansinansahin.com

1^∞, 0^0 ya da ∞^0 biçimindeki limitleri de logaritma alarak oran biçimine getirebiliriz.

NOT: $y = f(x)^{g(x)}$ için önce

$$\lim_{x\to a} \ln y = \lim_{x\to a} g(x)\ln f(x) = L$$

limiti bulunur; sonra y'nin limiti e^L olur.

ÖRNEK 30: Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

b. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$

c. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+1)^{1/\ln x}$

ÖRNEK 31: Aşağıdaki limiti bulunuz.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$$

Bu limitte L'Hospital Kuralı sonuç verir mi?

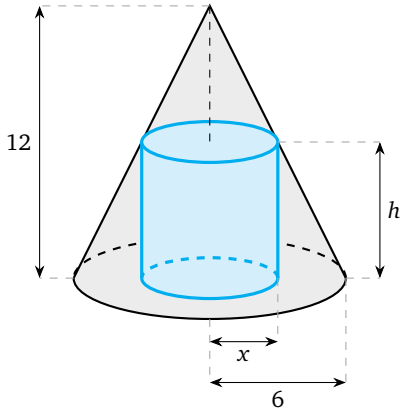
Uygulamalı Optimizasyon

Bir büyüklüğün en büyük ya da en küçük değerini bulmayı gerektiren problemleri türev yardımıyla çözelim. Uygulamalı bir optimizasyon problemi şu adımlarla çözülür:

1. Problem okunur; verilenler ve en büyük ya da en küçük yapılacak büyüklük belirlenir, şekil çizilir.
2. Değişkenler adlandırılır ve aralarındaki bağıntılar yazılır.
3. Büyüklük tek değişkenli bir fonksiyon olarak yazılır ve tanım kümesi belirlenir.
4. Kritik noktalar ve uç noktalar incelenir; sonuç sorunun cevabı olarak yazılır. Tanım kümesi kapalı aralık değilse, tek kritik noktada f' işaret değiştiriyorsa ya da f'' tüm aralıkta aynı işareti koruyorsa bu nokta mutlak ekstremumdur; tanım kümesine dahil bir uç nokta varsa değeri de karşılaştırılır.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 32: Taban yarıçapı 6 ve yüksekliği 12 olan dik dairesel bir koninin içine, tabanı koninin tabanı üzerinde olacak şekilde dik dairesel bir silindir yerleştiriliyor. Şekilde koni ve silindir görülmektedir; silindirin yarıçapı x, yüksekliği h ile gösterilmiştir. Hacmi en büyük olan silindirin yarıçapını, yüksekliğini ve hacmini bulunuz.



Ekonomideki optimizasyon problemlerinde kullanılan bir sonucu çıkaralım.

NOT: $r(x)$ gelir, $c(x)$ maliyet ve $K(x) = r(x) - c(x)$ kâr olsun. Kâr bir iç noktada en büyükse $K'(x) = 0$, yani $r'(x) = c'(x)$ olur: marjinal gelir marjinal maliyete eşittir.

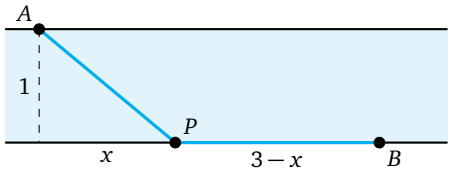
ÖRNEK 33: Bir ürünün x adedi satılırken birim fiyat $p(x) = 120 - 2x$ liradır. Üretimin maliyeti $c(x) = 300 + 20x$ liradır.

a. Kârı en büyük yapan üretim miktarını, birim fiyatı ve kârı bulunuz.

b. En fazla 20 adet üretilebiliyorsa aynı soruyu yanıtlayınız.

ÖRNEK 34: Bir ürünün x yüz adedinin üretim maliyeti $c(x) = 2x^2 + 18x + 98$ bin liradır. Ortalama (birim) maliyeti en küçük yapan üretim miktarını bulunuz; bu miktarda ortalama maliyeti marjinal maliyetle karşılaştırınız.

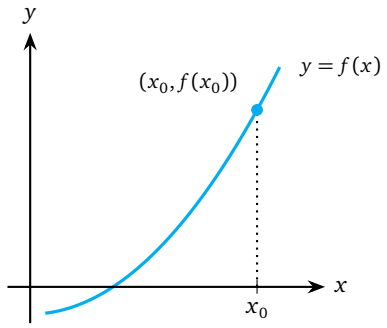
ÖRNEK 35: Genişliği 1 km olan düz bir nehrin bir kıyısında A noktası, karşı kıyıda ise A'nın tam karşısındaki noktadan 3 km aşağıda B noktası bulunmaktadır. A'dan B'ye bir boru hattı, nehir içinde A'dan karşı kıyıdaki bir P noktasına, oradan kıyı boyunca B'ye döşenecektir. Boru hattının kilometre başına maliyeti nehirde 5 bin lira, karada 3 bin liradır. P noktası A'nın karşısındaki noktadan kaç km uzakta olmalıdır ve en az maliyet nedir?



ertansinansahin.com

Newton Yöntemi

Çözümü bir formülle verilemeyen denklemlerin köklerini, teğet doğrularından yararlanarak çoğu durumda istediğimiz duyarlılıkta bulabiliriz. Önce yöntemin formülünü bir grafik üzerinde türetelim.



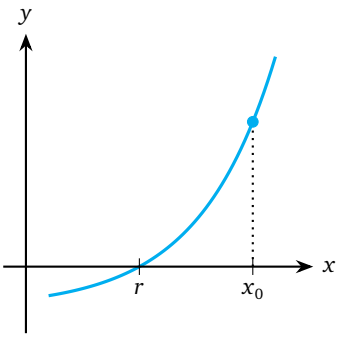
$f(x) = 0$ denkleminin bir kökü **Newton yöntemiyle** şu adımlarla yaklaşık bulunur:

1. Köke yakın bir x_0 seçilir (grafik ya da ara değer teoremi yardımcı olur).
2. $f'(x_n) \neq 0$ olmak üzere
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
ile $x_1, x_2, \ldots$ hesaplanır.
3. x_{n+1} ile x_n istenen basamağa kadar aynı olunca durulur.

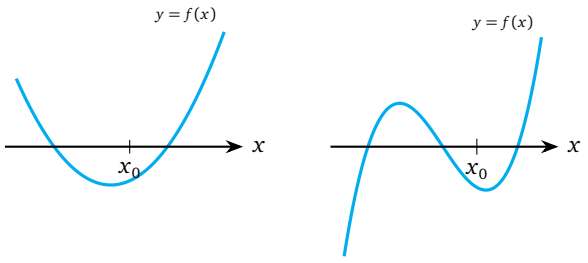
ÖRNEK 36: $x^3 - 10 = 0$ denklemine Newton yöntemini $x_0 = 2$ ile başlayarak uygulayıp $\sqrt[3]{10}$ sayısını yaklaşık bulunuz. x_1 ve x_2 değerlerini dört ondalık basamağa kadar hesaplayınız.

ÖRNEK 37: $a > 0$ için $x^2 - a = 0$ denklemine $(f(x) = x^2 - a)$ Newton yöntemini uygulayarak x_{n+1} için sadeleşmiş bir formül yazınız. Bu formülle $a = 7$ ve $x_0 = 3$ için x_2 değerini bulunuz.

ÖRNEK 38: Aşağıda kesin artan ve yukarı konkav bir f fonksiyonunun grafiği, kökü r ve başlangıç değeri $x_0 > r$ verilmiştir. Newton yönteminin x_1 ve x_2 değerlerini grafik üzerinde gösteriniz. $x_1, x_2, \ldots$ değerleri r sayısının hangi tarafında kalır ve dizi nasıl davranır?



Newton yöntemi her zaman aradığımız köke yakınsamaz: başlangıç noktası ve eğrinin biçimi, dizinin hangi köke gideceğini belirler. Aşağıdaki grafiklerde yöntemi x_0 ile başlatalım.



ertansinansahin.com

Terstürevler

Türevi bilinen bir fonksiyonu bulma işlemini ele alalım. Önce bulduğumuz fonksiyona ad verelim.

TANIM: I bir aralık olsun. Her $x \in I$ için $F'(x) = f(x)$ ise F fonksiyonuna f fonksiyonunun I üzerinde bir **terstürevi** denir.

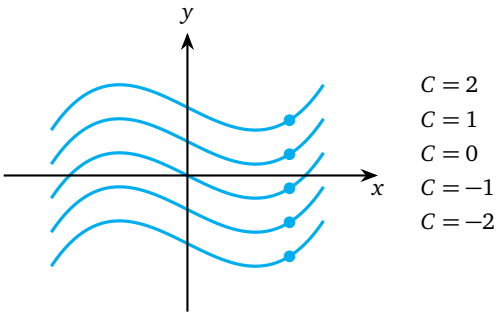
ÖRNEK 39: Aşağıdaki fonksiyonların birer terstürevini bulunuz.

a. $f(x) = 4x^3$

b. $g(x) = \sec^2 x$

c. $h(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + 3e^{3x}$

Aşağıda $f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunun birkaç terstürevinin grafiği görülüyor; bir fonksiyonun terstürevlerinin birbiriyle ilişkisini inceleyelim.



TEOREM: F fonksiyonu f fonksiyonunun bir I aralığındaki terstürevi ise f fonksiyonunun I aralığındaki her terstürevi, bir C sabiti için $F(x) + C$ biçimindedir.

Bir fonksiyonun bütün terstürevlerini tek ifadeyle yazmamızı sağlayan gösterimi tanımlayalım.

TANIM: f fonksiyonunun I üzerindeki bütün terstürevlerinin oluşturduğu kümeye f fonksiyonunun **belirsiz integrali** denir ve $\int f(x)\,dx$ ile gösterilir. F, f fonksiyonunun bir terstürevi ise

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

yazılır. Burada $f(x)$ **integrali alınan fonksiyon**, x **integral değişkeni**, C ise **integral sabitidir**.

NOT: Türev ve belirsiz integral, birbirinin tersi olarak çalışır:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x), \qquad \int F'(x)\,dx = F(x) + C.$$

Bildiğimiz türev formüllerini tersten okuyarak temel integralleri yazalım. Tabloda $k \neq 0$ bir sabittir.

İntegral	Sonuç
$\int x^n\,dx$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
$\int \sin kx\,dx$	$-\dfrac{1}{k}\cos kx + C$
$\int \cos kx\,dx$	$\dfrac{1}{k}\sin kx + C$
$\int \sec^2 kx\,dx$	$\dfrac{1}{k}\tan kx + C$
$\int \csc^2 kx\,dx$	$-\dfrac{1}{k}\cot kx + C$
$\int \sec kx \tan kx\,dx$	$\dfrac{1}{k}\sec kx + C$
$\int \csc kx \cot kx\,dx$	$-\dfrac{1}{k}\csc kx + C$
$\int e^{kx}\,dx$	$\dfrac{1}{k}e^{kx} + C$
$\int a^{kx}\,dx$	$\dfrac{a^{kx}}{k \ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$
$\int \dfrac{dx}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$ $(x \neq 0,$ her aralıkta$)$
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	$\dfrac{1}{k}\arcsin kx + C \quad (\lvert kx\rvert < 1)$
$\int \dfrac{dx}{1+k^2x^2}$	$\dfrac{1}{k}\arctan kx + C$
$\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcsec}\lvert x\rvert + C \quad (\lvert x\rvert > 1)$

ertansinansahin.com

Belirsiz integralin toplam ve sabitle çarpım karşısındaki davranışını yazalım.

NOT: k bir sabit olmak üzere

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx,$$

$$\int \big(f(x)\pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

olur. Ayrı integrallerin sabitleri tek bir C sabitinde birleştirilir.

ÖRNEK 40: Aşağıdaki belirsiz integralleri hesaplayınız.

a. $\int x^{-5}\,dx$

b. $\int \sqrt[4]{x}\,dx$

c. $\int \cos 4x\,dx$

d. $\int \sec^2\frac{x}{3}\,dx$

e. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

f. $\int 10^{2x}\,dx$

ÖRNEK 41: Aşağıdaki belirsiz integralleri, integrali alınan ifadeyi önce uygun biçime getirerek hesaplayınız.

a. $\int \frac{x^3-2\sqrt{x}}{x^2}\,dx \quad (x>0)$

b. $\int \cos^2 x\,dx$

c. $\int \tan^2 3x\,dx$

ÖRNEK 42: Aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu türev alarak gösteriniz.

a. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1}+C$

b. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C \quad (x>0)$

ertansinansahin.com

Başlangıç değer problemleri

Türevi ve bir noktadaki değeri verilen fonksiyonu bulma problemlerini tanımlayalım.

TANIM: Bir fonksiyonu ve türevlerini içeren denkleme **diferansiyel denklem** denir; bu bölümde $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ve $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ türlerini ele alacağız. Birinci türden denklemin çözümleri f fonksiyonunun terstürevleridir: $y = F(x)+C$ (**genel çözüm**); ikinci türevli denklemin genel çözümü iki sabit içerir. Denklemle birlikte bir $y(x_0) = y_0$ **başlangıç koşulu** verilmişse bu probleme **başlangıç değer problemi**, koşulu sağlayan çözüme **özel çözüm** denir. İkinci türevi içeren problemlerde iki başlangıç koşulu verilir.

ÖRNEK 43: Aşağıdaki başlangıç değer problemini $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ aralığında çözünüz.

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + 3x^2, \quad y(0) = 2$$

ÖRNEK 44: Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözünüz.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x + 6x, \quad y'(0) = 2,\ y(0) = 1$$

Doğrusal harekette terstürev

Doğrusal hareket eden bir cismin ivmesinden önce hızını, sonra konumunu bulalım.

ÖRNEK 45: Yerden 25 m/s ilk hızla düşey yukarı atılan bir taşın ivmesi sabit ve aşağı yönlü 10 m/s^2 değerindedir (hava direnci yoktur). Yukarı yönü pozitif alarak aşağıdakileri bulunuz.

a. Taşın çıktığı en büyük yüksekliği.

b. Taşın yere çarptığı anı ve o andaki hızını.

ertansinansahin.com

Alıştırmalar ve Problemler

1. $f(x) = x^3 - 12x + k$ fonksiyonunun $[-3, 3]$ aralığındaki mutlak maksimum değeri 15'tir. k sabitini ve f fonksiyonunun bu aralıktaki mutlak minimum değerini bulunuz.

2. f fonksiyonu her x için türevlenebilir olsun, $f(1) = -2$ ve her x için $1 \leq f'(x) \leq 4$ olsun. Ortalama değer teoremini kullanarak $f(5)$ için bir alt ve bir üst sınır bulunuz.

3. $f(x) = x^3 + kx^2 + 3x + 1$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde kesin artan olması için k hangi değerleri almalıdır?

4. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğinin $(1, -1)$ noktasında bükülme noktası olduğu ve f fonksiyonunun $x = 2$ noktasında yerel ekstremum değeri aldığı biliniyor. a, b ve c sabitlerini bulunuz.

5. Aşağıdaki limitin sonlu bir gerçel sayı olması için a kaç olmalıdır? Bu a değeri için limiti hesaplayınız.

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax - \sin x}{x^3}$$

6. L uzunluğundaki bir tel iki parçaya bölünüyor; bir parçadan kare, diğerinden daire yapılacaktır. Karenin ve dairenin alanları toplamının en küçük ve en büyük olması için tel nasıl bölünmelidir? En küçük ve en büyük toplam alanları L cinsinden bulunuz.

ertansinansahin.com

7. Aşağıdaki fonksiyonun asimptotlarını, artan ve azalan olduğu aralıkları, yerel ekstremum değerlerini ve konkavlığını inceleyerek grafiğini çiziniz.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

ertansinansahin.com

Cevaplar

Örnek sorular

1	a. min. 0, maks. yok b. maks. 9, min. 0 c. maks. 9, min. yok d. ikisi de yok
2	mutlak maks. $x = r$, mutlak min. $x = q$ yerel maks. $x = p, r$, yerel min. $x = a, q, b$
3	a. $x = 0, 3$ b. $x = 0, 2$ c. $x = -1, 0, 1$
4	maks. 3 $(x = 1, 4)$ min. -1 $(x = 0, 3)$
5	maks. $4 - 4\ln 2$ $(x = 4)$ min. $2 - 2\ln 2$ $(x = 2)$
6	maks. $\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$ $(x = \frac{\pi}{6})$ min. $\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$ $(x = \frac{5\pi}{6})$
7	mutlak maks. 5 $(x = \pm 3)$, mutlak min. 0 $(x = \pm 2)$ yerel maks. 5 $(x = \pm 3)$, 4 $(x = 0)$ yerel min. 0 $(x = \pm 2)$
8	$f(x) = 2x - \cos x$: $f(0) = -1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ $f'(x) = 2 + \sin x > 0$
9	$c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$
10	$c = \sqrt{\frac{13}{3}}$
11	$\frac{45-5}{20} = 2$ cm/gün
12	$f(x) = \frac{\pi}{2}$
13	$f(x) = \ln x + x^2 + 2$
14	$v(t) = 3t^2 - 4t + 2$ $s(t) = t^3 - 2t^2 + 2t + 1$
15	Videoya gidiniz.
16	kritik: $x = 1, 2$ kesin azalan: $(1, 2)$ kesin artan: $(-\infty, 1)$, $(2, \infty)$
17	kritik: $x = 1$ yerel maks. $f(0) = 0$ kesin azalan: $(0, 1)$, kesin artan: $(1, \infty)$ yerel ve mutlak min. $f(1) = -2$, mutlak maks. yok
18	kesin azalan: $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$, kesin artan: $(0, 2)$ yerel ve mutlak min. $f(0) = 0$ yerel maks. $f(2) = 4e^{-2}$, mutlak maks. yok

19 kritik: $x=-\sqrt{3},0,\sqrt{3}$ $x=0$'da ekstremum yok
yerel maks. $f(-\sqrt{3})=6\sqrt{3}$
yerel min. $f(\sqrt{3})=-6\sqrt{3}$

20 kesin azalan: $(-\infty,p)$, (r,∞) kesin artan: (p,r)
yerel min. $x=p$, yerel maks. $x=r$
$x=q$'da ekstremum yok

21 yukarı konkav: $(-\infty,-1)$, $(1,\infty)$
aşağı konkav: $(-1,1)$

22 a. var b. yok c. yok

23 a. yerel maks. $f(1)=2$, yerel min. $f(2)=1$
b. yerel maks. $f(-\sqrt{3})=6\sqrt{3}$
yerel min. $f(\sqrt{3})=-6\sqrt{3}$
$x=0$'da test sonuçsuz, ekstremum yok

24 mutlak min. $f(3)=-27$, mutlak maks. yok
bükülme noktaları: $(0,0)$, $(2,-16)$ asimptot yok

25 mutlak maks. $f(1)=\frac{1}{2}$, mutlak min. $f(-1)=-\frac{1}{2}$
bükülme noktaları: $x=0,\pm\sqrt{3}$ asimptot: $y=0$

26 yukarı konkav: $(-\infty,p)$, (q,∞)
aşağı konkav: (p,q) bükülme noktaları: $x=p,q$

27 a. $\frac{3}{2}$ b. $\frac{1}{2}$ c. $\frac{1}{3}$

28 a. 0 b. 0 c. 0

29 a. 1 b. $\frac{1}{2}$

30 a. 1 b. $e^{-1/2}$ c. e^2

31 limit: 1 kural sonuç vermez:
$\frac{(x+\sin x)'}{x'}=1+\cos x$, limiti yoktur

32 $x=4$, $h=4$ $V=64\pi$

33 a. $x=25$, $p=70$ lira, kâr 950 lira
b. $x=20$, $p=80$ lira, kâr 900 lira

34 $x=7$ (yüz adet)
ortalama maliyet $=c'(7)=46$ (bin lira/yüz adet)

35 $x=\frac{3}{4}$ km en az maliyet: 13 bin lira

36 $x_1=\frac{13}{6}\approx 2.1667$ $x_2\approx 2.1545$

37 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$
$x_1=\frac{8}{3}$, $x_2=\frac{127}{48}\approx 2.6458$

38 $x_1,x_2,\ldots>r$; dizi azalarak r'ye yaklaşır

39 a. x^4 b. $\tan x$ c. $\arctan x+e^{3x}$

40 a. $-\frac{1}{4x^4}+C$ b. $\frac{4}{5}x^{5/4}+C$ c. $\frac{1}{4}\sin 4x+C$
d. $3\tan\frac{x}{3}+C$ e. $\frac{1}{3}\arcsin 3x+C$ f. $\frac{10^{2x}}{2\ln 10}+C$

41 a. $\frac{x^2}{2}+\frac{4}{\sqrt{x}}+C$ b. $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$
c. $\frac{1}{3}\tan 3x-x+C$

42 a. $\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ b. $(x\ln x-x)'=\ln x$

43 $y=\tan x+x^3+2$

44 $y=x^3+3x+1-\sin x$

45 a. 31.25 m b. $t=5$ s, $v=-25$ m/s

Alıştırmalar ve problemler

1 $k=-1$ mutlak minimum: -17

2 $2\le f(5)\le 14$

3 $-3\le k\le 3$

4 $a=-3$, $b=0$, $c=1$

5 $a=1$ limit: $\frac{1}{6}$

6 en küçük: kare parçası $\frac{4L}{\pi+4}$, alan $\frac{L^2}{4(\pi+4)}$
en büyük: tel tamamen daire, alan $\frac{L^2}{4\pi}$

7 düşey asimptot $x=1$
eğik asimptot $y=x+1$
yerel maks. $f(0)=0$
yerel min. $f(2)=4$

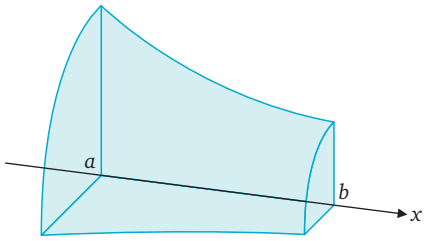
ertansinansahin.com

5. ÜNİTE
İNTEGRASYON UYGULAMALARI

video izle

Kesit Alanıyla Hacim Hesabı

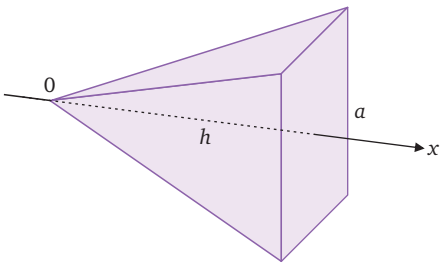
Paralel yüzeylerle dilimleme yaparak hacim hesabının nasıl yapılacağını tartışalım. Hacmin matematiksel tanımını yapalım.



TANIM: $x = a$'dan $x = b$'ye kadar olan, integrallenebilir bir $A(x)$ kesit alanına sahip katı bir cismin hacmi, A fonksiyonunun a'dan b'ye kadar olan integralidir:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

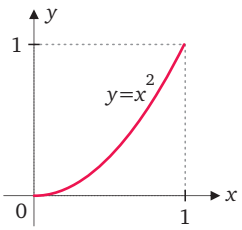
ÖRNEK 1: Taban kenar uzunluğu a ve yüksekliği h olan bir kare dik piramidin hacmini hesaplayınız.



Dönel cisimler: disk yöntemi

Dönel cisimlerin ne olduğunu ve nasıl elde edildiğini inceleyelim. Hacim hesaplamada kullanılan disk yöntemini açıklayalım ve matematiksel olarak ifade edelim.

ÖRNEK 2: $y = x^2$ eğrisi, $0 \le x \le 1$ aralığı ve x-ekseni arasında kalan bölge, bir katı cisim oluşturmak üzere x-ekseni etrafında döndürülüyor. Oluşan bu dönel cismin hacmini integral yardımıyla hesaplayınız.

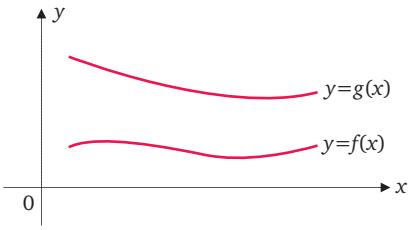


ertansinansahin.com

ÖRNEK 3: $y = \sqrt{x}$ eğrisi, $y = 2$ doğrusu ve $x = 0$ doğrusu ile sınırlanan bölgeyi göz önüne alınız. Bu bölgenin $y = 2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini veren integrali yazınız.

Dönel cisimler: pul yöntemi

İçinde boşluk kalan dönel cisimlerin hacimlerinin pul yöntemiyle nasıl hesaplandığını inceleyelim.



y-ekseni etrafında dönme durumu için hacim hesabını matematiksel olarak ifade edelim.

ÖRNEK 5: $y = e^x$ eğrisi, $y = x + 1$ doğrusu ve $x = 1$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgeyi göz önüne alınız. Bu bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini veren integrali yazınız.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 4: $x = y^2$ parabolü ile $x = 1$ doğrusu arasında kalan bölgeyi göz önüne alınız. Bu bölgenin $x = 1$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini veren integrali yazınız.

ÖRNEK 6: $x = y^2$ parabolü ile $x = 1$ doğrusu arasında kalan bölgeyi göz önüne alınız. Bu bölgenin $x = 2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini veren integrali yazınız.

Silindirik Kabuklarla Hacim Hesabı

$y = 4 - x^2$ parabolü ile x-ekseni arasında kalan bölgeyi $x = 3$ doğrusu etrafında döndürerek bir dönel cisim elde edelim. Bu cismin hacmini nasıl bulabileceğimizi tartışalım.

Silindirik kabuk yöntemini matematiksel olarak ifade edelim.

ÖRNEK 7: $y = \sqrt{x}$ eğrisi, x-ekseni ve $x = 1$ doğrusu arasında kalan bölgeyi göz önüne alınız. Bu bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini veren integrali silindirik kabuk yöntemiyle yazınız.

ÖRNEK 8: $x = y - y^2$ eğrisi ile y-ekseni arasında kalan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini veren integrali silindirik kabuk yöntemiyle yazınız.

Eğri Uzunluğu

Bir eğrinin uzunluğunun nasıl elde edileceğini tartışalım. Ardından bir eğrinin uzunluğunu tanımlayalım.

ertansinansahin.com

TANIM: Eğer f' türevi $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ise, $y = f(x)$ eğrisinin $A = (a, f(a))$ noktasından $B = (b, f(b))$ noktasına kadar olan uzunluğu, aşağıdaki integralin değeridir:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

ÖRNEK 9: $y = x^2 - x$ eğrisinin $x = 0$ ile $x = 2$ aralığındaki uzunluğunu veren integrali yazınız.

ÖRNEK 10: $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ eğrisinin $x = 0$ ile $x = 3$ aralığındaki uzunluğunu bulunuz.

Dönel Yüzey Alanları

Dönel cisimlerin yüzey alanını nasıl elde edeceğimizi tartışalım. Ardından dönel cisimler için yüzey alanının matematiksel tanımını inceleyelim.

TANIM: Eğer $f(x) \geq 0$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli türetilebilir ise, $y = f(x)$ grafiğinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzey alanı aşağıdaki integralin değeridir:

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

ÖRNEK 11: $y = \sqrt{x}$ eğrisinin $1 \leq x \leq 2$ aralığındaki parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını bulunuz.

ertansinansahin.com

Fiziksel İş ve Basınç Kuvveti Hesaplamaları

Değişken bir $F(x)$ kuvvetinin bir nesneyi $x = a$ noktasından $x = b$ noktasına kadar hareket ettirirken yaptığı toplam işi tanımlayalım.

ÖRNEK 12: Doğal boyu 40 cm ve kuvvet sabiti $k = 300$ N/m olan bir yayı 20 cm uzunluğa sıkıştırmak için gereken işi bulunuz.

ÖRNEK 13: Birim uzunluktaki kütlesi 0.1 kg/m olan 10 m uzunluğundaki bir ip, bir binanın tepesinden sarkıtılmaktadır. Bu ipin tamamını binanın tepesine çekmek için yapılması gereken iş kaç jouledür? (Yerçekimi ivmesinin büyüklüğünü $g = 10\ \text{m/s}^2$ alınız.)

ÖRNEK 14: Boyutları 8 m × 12 m ve derinliği 2 m olan dikdörtgenler prizması şeklindeki tam dolu bir havuzun suyu, havuzun üst kenar seviyesine pompalanarak boşaltılacaktır. Suyun özgül ağırlığının 10 kN/m^3 olduğu varsayılırsa bu işlem için yapılması gereken iş kaç jouledür?

Basınç kuvveti hesabı yaparken integralden nasıl yararlanacağımızı inceleyelim.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 15: Tabanı 3 m ve yüksekliği 2 m olan ikizkenar üçgen şeklindeki düz bir levha, tabanı yukarıda olacak şekilde suyun içine dikey olarak yerleştirilmiştir. Levhanın üst kenarı (üçgen tabanı), su yüzeyinin 1 m altındadır. Suyun öz ağırlığının 10 kN/m^3 olduğu varsayıldığında, suyun levhanın bir yüzüne uyguladığı toplam kuvveti bulunuz.

Moment ve Kütle Merkezi

Tek boyutlu bir cismin kütle merkezini nasıl bulacağımızı ve moment kavramını tartışalım. Kütle merkezinin konumunu matematiksel olarak ifade edelim.

ÖRNEK 16: Konuma bağlı kütle yoğunluğu $\delta(x) = 4 + 2x^3$ olan ve x-ekseni üzerinde $[0, 2]$ aralığında yer alan bir çubuğun;

a. Toplam kütlesini bulunuz.

b. Kütle merkezinin koordinatını bulunuz.

İki boyutlu bir cismin kütle merkezini nasıl bulacağımızı tartışalım. Kütle merkezinin konumunu matematiksel olarak ifade edelim.

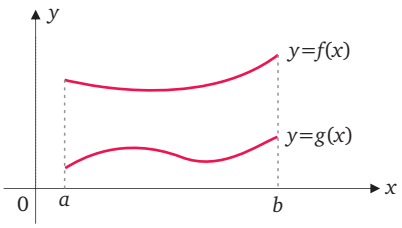
ÖRNEK 17: Koordinat düzleminde x-ekseni, $x = 2$ doğrusu ve $y = 3x$ doğrusu tarafından sınırlanan üçgensel bir levha bulunmaktadır. Bu levhanın konuma bağlı yoğunluğu $\delta(x) = x + 2$ olduğuna göre;

a. Levhanın toplam kütlesini bulunuz.

b. Levhanın kütle merkezinin x-koordinatını bulunuz.

c. Levhanın kütle merkezinin y-koordinatını bulunuz.

İki eğri arasında kalan levhaların kütle merkezini nasıl bulacağımızı tartışalım.



ÖRNEK 18: Koordinat düzleminde üstten $f(x) = \sqrt{x}$ eğrisi, alttan $g(x) = x^2$ eğrisi ile sınırlanan bir levha bulunmaktadır. Bu levhanın konuma bağlı yoğunluk fonksiyonu $\delta(x) = 6x$ olduğuna göre;

a. Levhanın toplam kütlesini bulunuz.

b. Levhanın kütle merkezinin x-koordinatını bulunuz.

c. Levhanın kütle merkezinin y-koordinatını bulunuz.

ertansinansahin.com

Merkezler

Bir şeklin merkezinin nasıl bulunacağını tartışalım.

ÖRNEK 19: Koordinat düzleminde x-ekseninin üzerinde yer alan, merkezi orijin olan $r = 4$ yarıçaplı yarım çember ile x-ekseni tarafından sınırlanan bir levha bulunmaktadır. Bu levhanın yoğunluğu δ sabitine eşittir. Bu levhanın;

a. Toplam kütlesini bulunuz.

b. Merkezinin koordinatlarını bulunuz.

ertansinansahin.com

Alıştırmalar ve Problemler

1. Birinci bölgede; soldan $x^2 + y^2 = 4$ çemberi, sağdan $x = 2$ doğrusu ve üstten $y = 2$ doğrusu ile sınırlanan bölgeyi göz önüne alınız. Bu bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini veren integrali;

a. Pul yöntemini kullanarak,

b. Silindirik kabuk yöntemini kullanarak yazınız.

2. $y = x^2 + 1$ parabolü ve $y = -x + 3$ doğrusu ile sınırlanan bölgeyi göz önüne alınız. Bu bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini veren integrali yazınız.

3. Köşeleri $(1,0)$, $(2,1)$ ve $(1,1)$ olan üçgensel bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini hesaplamak için;

a. Disk/pul yöntemini kullanarak hacmi veren integrali yazınız.

b. Silindirik kabuk yöntemini kullanarak hacmi veren integrali yazınız.

4. $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ fonksiyonunun grafiğinin $1 \leq x \leq 3$ aralığındaki uzunluğunu bulunuz.

5. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ eğrisinin $x = 0$ ile $x = \ln(3)$ aralığındaki uzunluğunu bulunuz.

6. r yarıçaplı ve merkezi orijinde olan bir çemberin çevresini bulmak için gerekli integrali yazınız.

ertansinansahin.com

7. $y = \frac{1}{3}x^3$ eğrisinin $0 \leq x \leq 1$ aralığındaki parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzey S olsun. Bu yüzeyinin alanını hesaplayınız.

8. D bölgesi; $y = e^x$, $y = \sqrt{x+1}$ eğrileri ve $y = 2$ doğrusu tarafından sınırlandırılmış bir bölge olsun.

a. D bölgesinin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan S katı cisminin hacmini, dilimleme (disk/pul) yöntemi kullanarak bir veya birden fazla integral ile ifade ediniz.

b. (a) şıkkında verilen S katı cisminin hacmini, silindirik kabuklar yöntemi kullanarak bir veya birden fazla integral ile ifade ediniz.

c. D bölgesinin $x = -2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan katı cismin hacmini, dilimleme (disk/pul) yöntemi kullanarak bir veya birden fazla integral ile ifade ediniz.

ertansinansahin.com

9. $x^2-6x+y^2=-5$ denklemi ile verilen çemberin iç kısmında kalan bölge y-ekseni etrafında döndürülüyor. Bu dönme sonucunda oluşan cismin hacmini veren integrali silindirik kabuk yöntemi kullanarak yazınız.

10. $\mathscr{R}$ bölgesi $x=0$ ve $y=x-3$ doğruları ile $y=(x-3)^2(x+1)$ eğrisi tarafından sınırlanan bölge olsun.

a. $\mathscr{R}$ bölgesinin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan katı cismin hacmini bir belirli integral olarak ifade ediniz.

b. $\mathscr{R}$ bölgesinin $y=-3$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan katı cismin hacmini bir belirli integral olarak ifade ediniz.

ertansinansahin.com

Cevaplar

Örnek sorular

1 $V=\frac{1}{3}a^2h$

2 $V=\frac{\pi}{5}$

3 $V=\pi\int_0^4(2-\sqrt{x})^2dx$

4 $V=\pi\int_{-1}^1(1-y^2)^2\,dy$

5 $V=\pi\int_0^1\left[e^{2x}-(x+1)^2\right]dx$

6 $V=\pi\int_{-1}^1\left[(2-y^2)^2-1\right]dy$

7 $V=\int_0^1 2\pi x\sqrt{x}\,dx$

8 $V=2\pi\int_0^1(y^2-y^3)\,dy$

9 $L=\int_0^2\sqrt{1+(2x-1)^2}\,dx$

10 $L=\frac{14}{3}$

11 $S=\frac{\pi}{6}(27-5\sqrt{5})$

12 $W=6\,\text{J}$

13 $W=50\,\text{J}$

14 $W=1920\,\text{kJ}$

15 $F=50\,\text{kN}$

16 a. $M=16$ b. $\bar{x}=1.3$

17 a. $M=20$ b. $\bar{x}=1.4$ c. $\bar{y}=2.1$

18 a. $M=0.9$ b. $\bar{x}=\frac{4}{7}$ c. $\bar{y}=\frac{5}{9}$

19 a. $M=8\pi\delta$ b. $(0,\frac{16}{3\pi})$

Alıştırmalar ve problemler

1
a. $V=\pi\int_0^2 y^2\,dy$
b. $V=2\pi\int_0^2 x\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)dx$

2 $V=\pi\int_{-2}^1\left[(-x+3)^2-(x^2+1)^2\right]dx$

3
a. $V=\pi\int_0^1\left[(y+1)^2-1\right]dy$
b. $V=2\pi\int_1^2 x(2-x)dx$

4 $L = \frac{14}{3}$

5 $L = \frac{4}{3}$

6 $C = 4\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$

7 $A = \frac{\pi}{9}(2\sqrt{2}-1)$

8

a. $V = \pi\int_1^2 \left[(y^2-1)^2-(\ln y)^2\right] dy$

b. $V = 2\pi\int_0^{\ln 2} x\left(e^x-\sqrt{x+1}\right) dx$
$+2\pi\int_{\ln 2}^3 x\left(2-\sqrt{x+1}\right) dx$

c. $V = \pi\int_1^2 \left[(y^2+1)^2-(\ln y+2)^2\right] dy$

9 $V = 4\pi\int_1^5 x\sqrt{4-(x-3)^2}\,dx$

10

a. $V = 2\pi\int_0^3 x\left[(x-3)^2(x+1)-(x-3)\right] dx$

b. $V = \pi\int_0^3 \left(\left[(x-3)^2(x+1)+3\right]^2-x^2\right) dx$

ertansinansahin.com

7. ÜNİTE
İNTEGRASYON TEKNİKLERİ

video izle

Temel İntegrasyon Formüllerinin Kullanımı

Temel integrasyon formüllerini inceleyelim.

1. $\int k\,dx = kx + C$ (herhangi bir k için)
2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int e^x\,dx = e^x + C$
5. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
8. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
9. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
10. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
11. $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$
12. $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$
13. $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$
14. $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
15. $\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$
16. $\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$
17. $\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
19. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left|\frac{x}{a}\right| + C$
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (a > 0)$
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (x > a > 0)$

ÖRNEK 1: Aşağıda verilen belirsiz integralleri, uygun değişken değiştirme yöntemlerini ve temel integral formüllerini kullanarak hesaplayınız:

a. $\int \frac{e^x}{9+e^{2x}}\,dx$ b. $\int \frac{1}{\sqrt{4-25x^2}}\,dx$

ertansinansahin.com

ÖRNEK 2: Tam kareye tamamlama yöntemini kullanarak aşağıdaki integrali hesaplayınız:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$$

ÖRNEK 3: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$$

ÖRNEK 4: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int \frac{4x^2-5x+3}{2x-1}\,dx$$

ÖRNEK 5: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int \frac{dx}{(2+\sqrt{x})^2}$$

Kısmi İntegrasyon

Kısmi integrasyon formülünü elde edelim. Formülün diferansiyel formunu yazalım.

ÖRNEK 6: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int x \sin x\,dx$$

ÖRNEK 7: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int \ln x\,dx$$

ertansinansahin.com

ÖRNEK 8: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int x^2 e^x \, dx$$

ÖRNEK 9: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int e^x \sin x \, dx$$

ÖRNEK 10: Aşağıdaki integrali, $\cos x$'in daha düşük bir kuvvetinin integrali cinsinden ifade eden bir formül elde ediniz:

$$\int \cos^n x \, dx$$

ertansinansahin.com

Kısmi integrasyon yöntemiyle belirli integralleri nasıl hesaplayacağımızı inceleyelim.

ÖRNEK 11: $y = xe^{-x}$ eğrisi, x-ekseni ve $x = 5$ dikey doğrusu ile sınırlanan bölgenin alanını;

a. Belirli integral yardımıyla ifade ediniz.

b. Kısmi integrasyon yöntemini kullanarak bu alanı hesaplayınız.

ertansinansahin.com

Trigonometrik İntegraller

m ve n tam sayılar olmak üzere, aşağıdaki integralin çözüm stratejilerini inceleyelim:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

ÖRNEK 12: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int \cos^3 x \sin^2 x \, dx$$

ÖRNEK 13: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int \cos^3 x \, dx$$

ÖRNEK 14: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$$

Köklü ifadeler içeren trigonometrik integrallerde kökten nasıl kurtulacağımızı inceleyelim.

ÖRNEK 15: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız.

$$\int \sqrt{1-\cos x}\, dx$$

$\tan x$ ve $\sec x$ fonksiyonlarının kuvvetlerini içeren integralleri nasıl alabileceğimizi tartışalım.

ÖRNEK 16: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız.

$$\int \tan^5 x \, dx$$

ertansinansahin.com

ÖRNEK 17: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız.

$$\int \sec^3 x \, dx$$

$\int \sin mx \sin nx \, dx$, $\int \sin mx \cos nx \, dx$ ve $\int \cos mx \cos nx \, dx$ integrallerini alırken ters dönüşüm formüllerini kullanabiliriz.

- $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$
- $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$
- $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

ÖRNEK 18: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int \sin x \cos 3x \, dx$$

ertansinansahin.com

Trigonometrik Dönüşümler

Örnekler üzerinden trigonometrik dönüşümlerin nasıl uygulanacağını inceleyelim.

ÖRNEK 19: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx$$

ÖRNEK 20: Aşağıdaki belirsiz integrali $a > 0$ için hesaplayınız:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

ÖRNEK 21: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}\,dx$$

Rasyonel Fonksiyonların Kısmi Kesirlere Ayırarak İntegrasyonu

Örnekler üzerinden kısmi kesirlere ayırma yönteminin nasıl uygulanacağını inceleyelim.

ÖRNEK 22: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int \frac{7x+1}{(x-2)(x+3)}dx$$

ertansinansahin.com

ÖRNEK 23: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int \frac{3x-5}{(x^2+1)(x+1)^2}dx$$

Has Olmayan İntegraller

Sınırları sonsuz olan integrallerin nasıl sonlu sonuçlar verebileceğini bir örnek üzerinden tartışalım.

ÖRNEK 24: $y = \frac{1}{x^2}$ eğrisi altında, $x = 1$ doğrusundan başlayarak sağa doğru sonsuza uzanan $(x \geq 1)$ bölgeyi düşünün. Bu bölgenin sınırlı bir alana sahip olup olmadığını belirlemek için;

a. Bölgenin $x = 1$ ile $x = b$ $(b > 1)$ arasındaki kısmının alanını veren $A(b)$ fonksiyonunu bulunuz.

b. $b \to \infty$ iken bu alanın limitini hesaplayarak toplam alanı bulunuz.

1. tip has olmayan integralleri tanımlayalım. Bu integrallerin **yakınsak** ya da **ıraksak** olmasının ne anlama geldiğini tartışalım.

ÖRNEK 25: $f(x) = xe^{-x}$ fonksiyonunun $x = 1$ ile $x = \infty$ aralığında altında kalan alan sonlu mudur? Eğer öyleyse, bu alanın değerini bulunuz.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$$

integralinin hangi p değerleri için yakınsak ya da ıraksak olduğunu bulalım.

İntegrallerde bir integrandın düşey asimptotunun olmasının nasıl has olmayan integralleri ortaya çıkabileceğini tartışalım. Aşağıdaki integrali inceleyelim:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

2. tip has olmayan integralleri tanımlayalım. Bu integrallerin yakınsak ya da ıraksak olmasının ne anlama geldiğini tartışalım.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 26: Aşağıda verilen has olmayan integralin yakınsaklık durumunu inceleyiniz:

$$\int_0^2 \frac{1}{2-x}\,dx$$

ÖRNEK 27: Aşağıdaki has olmayan integralin yakınsaklık durumunu inceleyiniz:

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$$

Yakınsaklık ve ıraksaklık testleri

Doğrudan karşılaştırma testini açıklayalım.

TEOREM: f ve g fonksiyonları $[a, \infty)$ aralığında sürekli ve her $x \geq a$ için $0 \leq f(x) \leq g(x)$ olsun. Bu durumda:

a. $\int_a^\infty g(x)\,dx$ yakınsaksa, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ de yakınsaktır.
b. $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ıraksaksa, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ de ıraksaktır.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 28: Aşağıda verilen has olmayan integrallerin yakınsaklık durumlarını doğrudan karşılaştırma testini kullanarak belirleyelim.

a. $\int_1^\infty \frac{1}{x^3+1}\,dx$
b. $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$
c. $\int_3^\infty \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$
d. $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$

Limit karşılaştırma testini açıklayalım.

TEOREM: f ve g pozitif fonksiyonları $[a, \infty)$ aralığında sürekli olsunlar. Eğer,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad 0 < L < \infty$$

koşulu sağlanıyorsa;

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{ve} \quad \int_a^\infty g(x)\,dx$$

integrallerinin her ikisi birden ya yakınsaktır ya da her ikisi birden ıraksaktır.

ÖRNEK 29: Aşağıda verilen has olmayan integrallerin yakınsaklık durumlarını limit karşılaştırma testini kullanarak belirleyelim.

a. $\int_2^\infty \frac{1}{x^2-1}\,dx$ b. $\int_1^\infty \frac{x+2}{2x^2+1}\,dx$

Alıştırmalar ve Problemler

1. Aşağıda verilen belirsiz integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ c. $\int \frac{e^{-\tan x}}{\cos^2 x}dx$

b. $\int (\sec x + \tan x)^2 dx$ d. $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^{-2x}}$

2. Aşağıda verilen integralleri kısmi integrasyon yöntemini kullanarak hesaplayınız.

a. $\int x^2 \ln(x)\,dx$ c. $\int e^{3x}\cos x\,dx$

b. $\int (2x-3)\sin 2x\,dx$ d. $\int x^2 e^{-x}\,dx$

ertansinansahin.com

3. n pozitif bir tam sayı olmak üzere, aşağıdaki eşitliğin sağlandığını kısmi integrasyon yöntemini kullanarak gösteriniz:

$$\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$$

4. f sürekli bir fonksiyon olmak üzere, aşağıdaki eşitliğin sağlandığını kısmi integrasyon yöntemini kullanarak gösteriniz:

$$\int_a^b \left(\int_x^b f(t)\,dt\right) dx = \int_a^b (x-a)f(x)\,dx$$

ertansinansahin.com

5. Aşağıda verilen trigonometrik integralleri hesaplayınız.

a. $\int \sin^5 x\,dx$

b. $\int \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}dx$

c. $\int \tan^4 x \sec^4 x\,dx$

d. $\int x \sin^3 x\,dx$

6. Aşağıda verilen integralleri trigonometrik dönüşümleri kullanarak hesaplayınız.

a. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

b. $\int \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\,dx$

c. $\int \frac{dx}{(9-x^2)^{3/2}}$

d. $\int \frac{2dx}{(4x^2+1)^2}$

7. Aşağıda verilen integralleri kısmi kesirlere ayırma yöntemini kullanarak hesaplayınız.

a. $\int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx$

b. $\int \frac{x+7}{x^2+2x-8}\,dx$

c. $\int \frac{x^4}{x^2-4}\,dx$

ertansinansahin.com

8. Aşağıdaki has olmayan integrallerin her birinin, doğrudan karşılaştırma testi kullanarak yakınsak mı yoksa ıraksak mı olduğunu belirleyiniz.

a. $\int_1^\infty \frac{2+\sin\left(x^2\right)}{\sqrt{x^5+4x}}\,dx$

b. $\int_1^\infty \frac{e^{1/x}}{x+\ln^2 x}\,dx$

c. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\ln(1+x)}\,dx$

d. $\int_0^1 \frac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}}\,dx$

9. Aşağıdaki integralin yakınsak olmasını sağlayan p değerlerini bulunuz ve bu değerler için integrali hesaplayınız.

$$\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$$

ertansinansahin.com

10. Aşağıdaki has olmayan integralin yakınsaklık veya ıraksaklık durumunu limit karşılaştırma testini kullanarak belirleyiniz:

$$\int_2^\infty \frac{\ln(x)+\sqrt{x}}{x^2-\ln(x)}\,dx$$

Cevaplar

Örnek sorular

1 a. $\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{e^x}{3}\right)+C$ b. $\frac{1}{5}\arcsin\left(\frac{5x}{2}\right)+C$

2 $\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$

3 $\csc x-\cot x+C$

4 $x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}\ln|2x-1|+C$

5 $2\ln\left(2+\sqrt{x}\right)+\frac{4}{2+\sqrt{x}}+C$

6 $-x\cos x+\sin x+C$

7 $x\ln x-x+C$

8 $(x^2-2x+2)e^x+C$

9 $\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C$

10 $\int\cos^n x\,dx=\frac{\cos^{n-1}x\sin x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx$

11 a. $A=\int_0^5 xe^{-x}\,dx$ b. $A=1-6e^{-5}$

12 $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$

13 $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$

14 $\frac{x}{16}-\frac{\sin(4x)}{64}-\frac{\sin^3(2x)}{48}+C$

15 $-2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)+C$

16 $\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\sec x|+C$

17 $\frac{1}{2}(\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|)+C$

18 $-\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$

19 $\arctan x+C$

20 $\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$

21 $-\frac{\sqrt{16-x^2}}{x}-\arcsin\left(\frac{x}{4}\right)+C$

22 $3\ln|x-2|+4\ln|x+3|+C$

23 $\frac{5}{4}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{3}{2}\arctan(x)-\frac{5}{2}\ln|x+1|+\frac{4}{x+1}+C$

24 a. $A(b)=1-\frac{1}{b}$ b. Alan $=1$

25 Sonludur, Alan $=\frac{2}{e}$

26 İntegral ıraksaktır.

27 İntegral yakınsaktır, $I=4$

28 a. Yakınsak b. Yakınsak
c. Iraksak d. Yakınsak

29 a. Yakınsak b. Iraksak

Alıştırmalar ve problemler

1
a. $\frac{1}{2}\arcsin(2x)+C$
b. $2\tan x+2\sec x-x+C$
c. $-e^{-\tan x}+C$
d. $\frac{1}{2}\arctan\left(e^{2x}\right)+C$

2
a. $\frac{x^3}{3}\ln(x)-\frac{x^3}{9}+C$
b. $-\frac{2x-3}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+C$
c. $\frac{e^{3x}}{10}(\sin x+3\cos x)+C$
d. $-e^{-x}(x^2+2x+2)+C$

3 Videoya gidiniz.

4 Videoya gidiniz.

5
a. $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$
b. $-\frac{4\sqrt{2}}{3}\cos^3\left(\frac{x}{2}\right)+C$
c. $\frac{1}{5}\tan^5 x+\frac{1}{7}\tan^7 x+C$
d. $-x\cos x+\frac{x\cos^3 x}{3}+\frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{9}\sin^3 x+C$

6
a. $\operatorname{arcsec}(x)+C$
b. $\arcsin(x)-\sqrt{1-x^2}+C$
c. $\frac{x}{9\sqrt{9-x^2}}+C$
d. $\frac{1}{2}\arctan(2x)+\frac{x}{4x^2+1}+C$

7
a. $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$
b. $-\frac{1}{2}\ln|x+4|+\frac{3}{2}\ln|x-2|+C$
c. $\frac{x^3}{3}+4x+4\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$

8
a. Yakınsak b. Iraksak
c. Iraksak d. Iraksak

9 $p>1$ için yakınsar. İntegral değeri: $\frac{1}{p-1}$

10 İntegral yakınsaktır, videoya gidiniz.

ertansinansahin.com

8. ÜNİTE

SONSUZ DİZİLER VE SERİLER - 1

video izle

Motivasyon

Bu ünitede temel amacımız:

- Karmaşık fonksiyonları, sonsuz toplamlar (seriler) yardımıyla nasıl temsil edebileceğimizi öğrenmek.
- Bir yaklaşımın (tahminin) gerçek değere ne kadar yakın olduğunu "hata tahmini" ile ölçmek.
- Diferansiyel denklemleri ve integral hesaplarını, serileri kullanarak çok daha kolay çözülebilir hale getirmek.

Aşağıdaki örnekleri inceleyelim:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Diziler

Dizi kavramının ne olduğunu ifade edelim.

Aşağıdaki dizi örneklerini inceleyelim.

- $a_n = 3n + 1$
- $b_n = (-1)^n \cdot n^2$

ÖRNEK 1: Aşağıda ilk birkaç terimi verilen dizinin genel terimi a_n için bir formül bulunuz (örüntünün aynı şekilde devam ettiğini varsayınız):

$$\left\{\frac{5}{3}, -\frac{7}{9}, \frac{9}{27}, -\frac{11}{81}, \frac{13}{243}, \cdots\right\}$$

Yakınsaklık ve ıraksaklık

TANIM: Her $\epsilon > 0$ sayısı için $n > N$ olduğunda $|a_n - L| < \epsilon$ kalacak şekilde bir N tam sayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi L sayısına yakınsar denir.

Bu durum $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ veya $a_n \to L$ şeklinde gösterilir ve L sayısına dizinin limiti denir. Böyle bir L sayısının bulunmadığı durumlarda $\{a_n\}$ dizisi ıraksar.

$a_n = \frac{1}{n}$ genel terimi ile verilen $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ dizisinin yakınsak olduğunu gösterelim.

$a_n = (-1)^{n+1}$ genel terimi ile verilen $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\}$ dizisinin ıraksak olduğunu gösterelim.

Bir dizi için sonsuza ya da negatif sonsuza ıraksamayı tanımlayalım.

ertansinansahin.com

Dizilerin limitlerinin hesaplanması

Dizilerin limitlerini hesaplarken limit konusunda kullandığımız yöntemlerden nasıl faydalandığımızı inceleyelim.

$\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ reel sayı dizileri olsun. A ve B reel sayılar olmak üzere; eğer $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ve $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ ise aşağıdaki kurallar geçerlidir:

Toplam Kuralı: $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$

Fark Kuralı: $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$

Sabit Çarpan Kuralı: $\lim_{n\to\infty}(k \cdot b_n) = k \cdot B,$ (herhangi bir k sayısı için)

Çarpım Kuralı: $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$

Bölüm Kuralı: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B},\ B \neq 0$ için

NOT: Limit hesabında kullandığımız birçok yöntemi burada kullanabiliriz.

TEOREM: Eğer $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ise, bu durumda her n tam sayısı için tanımlanan $a_n = f(n)$ dizisinin limiti de $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ olur.

ÖRNEK 2: Aşağıda verilen limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n} - 2\right)$

b. $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^4-2}{3n^4+n^2}$

c. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$

d. $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$

L'Hôpital kuralını kullanarak aşağıdaki limiti hesaplayalım. Bu kuralın kullanılma koşulunu tartışalım.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$$

Yinelemeli tanımlar

Bir örnek üzerinden yinelemeli tanımları inceleyelim.

ÖRNEK 3: $f_1 = 1$ ve $f_2 = 1$ olmak üzere, her $n \geq 3$ için $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ şeklinde tanımlanan Fibonacci dizisi $\{f_n\}$ veriliyor. Buna göre dizinin ilk 6 terimini yazınız.

ertansinansahin.com

Sınırlı monoton diziler

Bir dizinin sınırsız ya da üstten veya alttan sınırlı olmasının ne anlama geldiğini örnekler üzerinden inceleyelim.

- $a_n = n^2$
- $b_n = \frac{n+1}{n}$

Bir dizinin monoton olup olmamasının ya da azalmayan veya artmayan olmasının ne olduğunu tanımlayalım. Aşağıdaki örnekleri bu açıdan değerlendirelim.

- $\{n^3\} = 1, 8, 27, \ldots, n^3, \ldots$
- $\{\frac{n+1}{n}\} = 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots$
- $\{\frac{1}{3^n}\} = \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots, \frac{1}{3^n}, \ldots$
- $\{5\} = 5, 5, 5, \ldots, 5, \ldots$
- $\{(-2)^n\} = -2, 4, -8, 16, \ldots$

TEOREM: Bir $\{a_n\}$ dizisi hem sınırlı hem de monoton ise bu dizi yakınsaktır.

Sonsuz Seriler

Sonsuz seri kavramını açıklayalım. Bir sonsuz seri örneğini kısmi toplamlar üzerinden inceleyelim.

Bir seri için yakınsaklığı ve ıraksaklığı tanımlayalım.

Geometrik seriler

Geometrik serilerin formunu inceleyelim. Bu forma uygun bir örnek yazalım. Böyle bir serinin yakınsaklık koşulunu tartışalım. Yakınsaklık durumu için serinin yakınsadığı değeri elde edelim.

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

ertansinansahin.com

ÖRNEK 4: Aşağıda genel terimleri verilen sonsuz serilerin toplamlarını bulunuz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ b. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{4^n}$

ÖRNEK 5: Yerden h kadar yükseklikten serbest bırakılan bir top, her yere çarptığında bir önceki düşüş yüksekliğinin k katı kadar yükseğe geri sıçramaktadır $(0 < k < 1)$. Topun aldığı toplam yolu h ve k cinsinden bulunuz.

ÖRNEK 6: 2.3575757... devirli ondalık sayısını, sonsuz bir geometrik serinin toplamı olarak ifade ederek iki tam sayının oranı şeklinde yazınız.

ÖRNEK 7: Aşağıda verilen "teleskopik" serinin toplamını bulunuz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$$

Iraksaklık testi

Aşağıdaki serinin neden ıraksak olduğunu inceleyelim.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n}{n+1} + \cdots$$

TEOREM: Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak ise $a_n \to 0$ olur.

ÖRNEK 8: Aşağıda verilen sonsuz serilerin yakınsaklık veya ıraksaklık durumunu belirleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2n+3}$

ertansinansahin.com

Serilerin birleştirilmesi

Elimizde iki yakınsak seri olduğunda, bunları terim terim toplayabilir, terim terim çıkarabilir veya sabitlerle çarparak yeni yakınsak seriler elde edebiliriz.

TEOREM: Eğer $\sum a_n = A$ ve $\sum b_n = B$ yakınsak seriler ise, bu durumda aşağıdaki kurallar geçerlidir:

Toplam Kuralı: $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n = A + B$

Fark Kuralı: $\sum (a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n = A - B$

Sabit Kat Kuralı: $\sum k a_n = k \sum a_n = kA$ $(k \in \mathbb{R})$.

Bu teoremi ıraksak seriler için tartışabiliriz.

ÖRNEK 9: Aşağıdaki serinin toplamını bulunuz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}+3}{5^{n-1}}$$

Terim ekleme ya da çıkarma ve indis değiştirme

Terim ekleme ya da çıkarma ve indis değiştirme işlemlerini nasıl yaptığımızı inceleyelim.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 10: Aşağıda verilen sonsuz serilerin yakınsaklık durumunu inceleyiniz ve eğer yakınsak ise serinin toplamını bulunuz.

a. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ b. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$

İntegral Testi

Aşağıdaki teoremi harmonik serinin ıraksaklığını göstermek için kullanalım.

TEOREM: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ negatif olmayan terimlerden oluşan bir seri olsun. Bu seri ancak ve ancak kısmi toplamları üstten sınırlı ise yakınsaktır.

ÖRNEK 11: Aşağıda verilen serinin yakınsaklık durumunu inceleyelim:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

TEOREM: $\{a_n\}$ pozitif terimli bir dizi olsun. Tüm $x \geq N$ ($N \in \mathbb{Z}^+$) değerleri için f fonksiyonunun; sürekli, pozitif ve azalan bir fonksiyon olduğunu ve $a_n = f(n)$ sağladığını varsayalım. Bu durumda, $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ serisi ile $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ integrali ya aynı anda yakınsar ya da aynı anda ıraksar.

p-serisinin yakınsaklık ve ıraksaklık koşulunu inceleyelim:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

ÖRNEK 12: Aşağıda verilen sonsuz serilerin yakınsaklık veya ıraksaklık durumunu belirleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ b. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2(n)}$

ertansinansahin.com

İntegral testi ile hata tahmini

Pozitif terimli bir $\sum a_n$ serisinin integral testi ile yakınsak olduğunun gösterildiğini varsayalım. Bu durumda, serinin toplam değeri S ile n. kısmi toplamı s_n arasındaki farkı ölçen R_n kalan teriminin büyüklüğünü tahmin edelim.

ÖRNEK 13: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisinin toplamı, $n = 4$ alınarak integral testi ile hata tahmini yöntemiyle kestirilecektir. Serinin toplamı S için alt ve üst sınırları belirleyiniz. (Elde ettiğiniz sonucu $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.64493$ değeri ile kıyaslayınız.)

Karşılaştırma Testleri

Doğrudan karşılaştırma testi

TEOREM: $\sum a_n$ ve $\sum b_n$, her n için $0 \le a_n \le b_n$ şartını sağlayan iki seri olsun. Bu durumda:

I. Eğer $\sum b_n$ yakınsaksa $\sum a_n$ de yakınsaktır.

II. Eğer $\sum a_n$ ıraksaksa $\sum b_n$ de ıraksaktır.

ÖRNEK 14: Aşağıda verilen sonsuz serilerin yakınsaklık durumunu doğrudan karşılaştırma testi ile inceleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+\sqrt{n}}$

Limit karşılaştırma testi

TEOREM: Her $n \geq N$ $(N \in \mathbb{Z})$ için $a_n > 0$ ve $b_n > 0$ olsun.

I. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ ve $c > 0$ ise $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ ya beraber yakınsar ya da beraber ıraksar.

II. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ve $\sum b_n$ yakınsar ise $\sum a_n$ yakınsar.

III. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ ve $\sum b_n$ ıraksar ise $\sum a_n$ ıraksar.

ÖRNEK 15: Aşağıda verilen sonsuz serilerin yakınsaklık durumunu limit karşılaştırma testi ile inceleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5n}{n^4+2n-1}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\ln(n)}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$

ertansinansahin.com

Mutlak Yakınsaklık; Oran ve Kök Testleri

TANIM: Eğer $\sum |a_n|$ serisi yakınsaksa $\sum a_n$ serisi mutlak yakınsaktır.

TEOREM: Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serisi yakınsaksa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de yakınsaktır.

ÖRNEK 16: Aşağıda verilen serilerin mutlak yakınsak olup olmadıklarını belirleyiniz ve yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

ÖRNEK 17: Aşağıda verilen serilerin yakınsaklık durumlarını oran testini kullanarak inceleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$

ertansinansahin.com

Oran testi

TEOREM: $\sum a_n$ herhangi bir seri olsun ve varsayalım ki:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$$

Bu durumda;

I. Eğer $\rho < 1$ ise seri mutlak yakınsaktır.

II. Eğer $\rho > 1$ veya ρ sonsuzsa seri ıraksaktır.

III. Eğer $\rho = 1$ ise, test sonuçsuzdur.

Kök testi

TEOREM: $\sum a_n$ herhangi bir seri olsun ve varsayalım ki

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

olsun. Bu durumda;

I. Eğer $\rho < 1$ ise seri mutlak yakınsaktır.

II. Eğer $\rho > 1$ veya ρ sonsuz ise seri ıraksaktır.

III. Eğer $\rho = 1$ ise test sonuçsuzdur.

ÖRNEK 18: Aşağıda verilen serilerin yakınsaklık durumlarını kök testini kullanarak inceleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{4n-2}\right)^n$ b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}$

Almaşık Seriler ve Koşullu Yakınsaklık

TEOREM:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$$

şeklindeki bir seri, aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa yakınsaktır:

I. Tüm u_n değerleri pozitif olmalıdır.

II. u_n dizisi, yeterince büyük her $n \geq N$ tam sayısı için $u_n \geq u_{n+1}$ koşulunu sağlamalı, yani monoton azalan bir karakter sergilemelidir.

III. $u_n \to 0$ olmalıdır.

ÖRNEK 19: Aşağıda verilen sonsuz serinin yakınsaklığını inceleyiniz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Harmonik serinin bir varyasyonu olan aşağıdaki

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

sonsuz seri için *almaşık seri tahmin teoremini* inceleyelim.

Koşullu yakınsaklık

TANIM: Yakınsak olan fakat mutlak yakınsak olmayan bir seriye koşullu yakınsak seri denir.

Aşağıdaki seriyi koşullu yakınsaklık durumu için inceleyelim:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

ÖRNEK 20: Aşağıda verilen serilerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\arctan n}{n^2+1}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+5}$

ertansinansahin.com

Alıştırmalar ve Problemler

1. Aşağıda genel terimi verilen dizilerin yakınsaklık durumunu inceleyiniz. Eğer yakınsak ise limitini bulunuz.

a. $a_n = \frac{3n^2-5n+1}{2n^2+7}$

b. $a_n = \left(1+\frac{5}{n}\right)^n$

c. $a_n = \frac{\ln\left(n^2\right)}{n}$

d. $a_n = \frac{(-1)^n \sin(n)}{n^2+1}$

e. $a_n = \frac{n!}{n^n}$

f. $a_n = \frac{n^2+\ln n}{3n+2}$

2. Aşağıda genel terimi verilen dizilerin monotonluğunu ve sınırlılığını belirleyiniz.

a. $a_n = \frac{4n-3}{2n+5}$

b. $a_n = \frac{(3n+1)!}{(n+2)!}$

ertansinansahin.com

3. Aşağıda verilen sonsuz serilerin yakınsaklık durumunu inceleyiniz ve eğer yakınsak ise serinin toplamını bulunuz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^{n+1}}{5^n}\right)$

b. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{3}{2^n}\right)$

c. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{2^n}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n(n+1)}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{1/n}}-\frac{1}{2^{1/(n+1)}}\right)$

f. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{1}{2^n}$

4. Aşağıda verilen sonsuz seriler için ıraksaklık testini uygulayıp elde edilen sonucu ifade ediniz.

a. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{e^n+n^2}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{n^3}$

5. Aşağıdaki geometrik serilerin her biri için serinin yakınsadığı x değerlerini bulunuz. Ayrıca, bu x değerleri için serinin toplamını x'in bir fonksiyonu olarak ifade ediniz.

a. $\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^n$

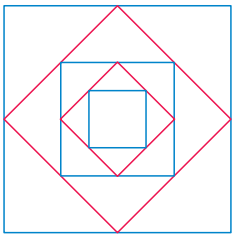
b. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+2}{2}\right)^n$

c. $\sum_{n=0}^{\infty}\cos^n x$

d. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\ln x}{2}\right)^n$

ertansinansahin.com

6. Bir kenar uzunluğu a olan bir kare ile başlanarak, her yeni kare bir önceki karenin kenar orta noktaları birleştirilerek oluşturulmaktadır. Bu işlem sonsuz kez tekrarlandığında oluşan tüm karelerin çevrelerinin toplamını a cinsinden bulunuz.



7. Aşağıda verilen sonsuz serilerin yakınsaklık veya ıraksaklık durumunu integral testi kullanarak belirleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$

b. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

8. Aşağıda verilen serilerin yakınsaklık durumlarını karşılaştırma testlerini kullanarak belirleyiniz:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+n}$

b. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+5}{n^2-n}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}e^n}$

d. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$

9. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz. (İpucu: İlk olarak $n \geq 2$ için $1/n! \leq 1/n(n-1)$ olduğunu gösteriniz.)

ertansinansahin.com

10. Aşağıda verilen serilerin yakınsaklık durumlarını oran ya da kök testini kullanarak inceleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^n(n!)^2}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Cevaplar

Örnek sorular

1	$a_n = (-1)^{n+1}\frac{2n+3}{3^n}$
2	a. -2 b. $\frac{5}{3}$ c. 0 d. 0
3	{1,1,2,3,5,8}
4	a. 6 b. $\frac{12}{5}$
5	$S = h\left(\frac{1+k}{1-k}\right)$
6	$\frac{389}{165}$
7	$\frac{1}{2}$
8	a. Iraksak b. Iraksak
9	$\frac{125}{12}$
10	a. Yakınsak, $\frac{1}{12}$ b. Yakınsak, $\frac{8}{3}$
11	Yakınsak
12	a. Yakınsak b. Yakınsak
13	$1.62361 \le S \le 1.67361$
14	a. Iraksak b. Yakınsak
15	a. Yakınsak b. Yakınsak c. Iraksak
16	a. Seri mutlak yakınsaktır; dolayısıyla yakınsaktır. b. Seri mutlak yakınsaktır; dolayısıyla yakınsaktır.
17	a. Yakınsak b. Iraksak c. Oran testi sonuç vermez ($L = 1$)
18	a. Yakınsak b. Yakınsak
19	Yakınsak
20	a. Koşullu yakınsak b. Iraksak c. Mutlak yakınsak

Alıştırmalar ve problemler

1	a. Yakınsak, $L = \frac{3}{2}$ b. Yakınsak, $L = e^5$ c. Yakınsak, $L = 0$ d. Yakınsak, $L = 0$ e. Yakınsak, $L = 0$ f. Iraksak, $+\infty$
2	a. Monoton azalmayan ve sınırlıdır. Alt sınır $\frac{1}{7}$, üst sınır 2. b. Monoton azalmayan, alttan sınır 4, üstten sınırsız.
3	a. Yakınsak, $\frac{7}{6}$ b. Iraksak c. Yakınsak, $\frac{2}{3}$ d. Yakınsak, 5 e. Yakınsak, $-\frac{1}{2}$ f. Iraksak
4	a. Iraksak b. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, test sonuçsuz
5	a. $x \in (-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $S(x) = \frac{1}{1-3x}$ b. $x \in (-4,0)$, $S(x) = -\frac{2}{x}$ c. $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, $S(x) = \frac{1}{1-\cos x}$ d. $x \in (e^{-2},e^2)$, $S(x) = \frac{2}{2-\ln x}$
6	$L = 4a(2+\sqrt{2})$
7	a. Iraksak b. Iraksak
8	a. Yakınsak b. Iraksak c. Yakınsak d. Iraksak
9	Yakınsak
10	a. Iraksak b. Yakınsak

ertansinansahin.com

8. ÜNİTE

SONSUZ DİZİLER VE SERİLER - 2

video izle

Kuvvet Serileri

TANIM: $x = 0$ merkezli bir kuvvet serisi, aşağıdaki formda bir seridir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

$x = a$ merkezli bir kuvvet serisi, aşağıdaki formda bir seridir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots$$

Burada a merkez ve $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ katsayıları birer sabittir.

Aşağıdaki geometrik kuvvet serisini inceleyelim ve serinin yakınsak olduğu aralığı elde edelim. Bu aralık için serinin yakınsadığı fonksiyonu bulalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

Aşağıdaki geometrik kuvvet serisini inceleyelim ve serinin yakınsak olduğu aralığı elde edelim. Bu aralık için serinin yakınsadığı fonksiyonu bulalım.

$$1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-1)^n + \cdots$$

ertansinansahin.com

ÖRNEK 1: Aşağıda verilen kuvvet serilerinin hangi x değerleri için yakınsadığını belirleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$

b. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

c. $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = 1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots$

TEOREM: Bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık karakteri, serinin belirli noktalardaki davranışı üzerinden şu şekilde tanımlanır:

I. **Yakınsaklık:** Eğer seri $x = c$ $(c \neq 0)$ değerinde yakınsak ise; merkeze c noktasından daha yakın olan tüm x değerleri için, yani her $|x| < |c|$ için, seri mutlak yakınsaktır.

II. **Iraksaklık:** Eğer seri $x = d$ değerinde ıraksak ise; merkezden d noktasına göre daha uzak olan tüm x değerleri için, yani her $|x| > |d|$ için, seri ıraksaktır.

NOT: Bu teorem bize kuvvet serilerinin her zaman merkeze göre simetrik bir yakınsaklık aralığına sahip olduğunu söyler.

$\sum a_n(x-a)^n$ kuvvet serisi üzerinden *yakınsaklık yarıçapı* kavramını tartışalım.

Kuvvet serileri üzerinde işlemler

Kuvvet serileri için *seri çarpma* işlemini aşağıdaki örnek üzerinden inceleyelim:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$$

Bir kuvvet serisinde x değişkeninin yerine bir $f(x)$ fonksiyonu yazılabilir.

Aşağıdaki seri üzerinde bunu $f(x) = 4x^2$ için sonuçlarıyla birlikte inceleyelim:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Bir kuvvet serisi terim terim türevlenebilir.

Aşağıdaki seri üzerinde bunu inceleyelim:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

ertansinansahin.com

Bir kuvvet serisi terim terim integre edilebilir.

Aşağıdaki seri üzerinde bunu inceleyelim:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

ÖRNEK 2: Aşağıdaki kuvvet serisi ile tanımlanan $f(x)$ fonksiyonunu belirleyiniz:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \quad -1 \le x \le 1.$$

ÖRNEK 3: Aşağıdaki seri $\sin x$ fonksiyonu için verilmiştir ve tüm x değerleri için $\sin x$ değerine yakınsar:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

a. $\cos x$ serisinin ilk terimlerini bulunuz. Seri hangi x değerleri için yakınsar?

b. $\sin x$ serisinde x yerine $2x$ yazarak tüm x değerleri için $\sin 2x$'e yakınsayan bir seri bulunuz.

c. Seri çarpımını kullanarak $2 \sin x \cos x$ serisinin ilk terimlerini hesaplayınız. Cevabınızı (b) şıkkındaki cevapla karşılaştırınız.

ertansinansahin.com

Taylor ve Maclaurin Serileri

Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ civarında pozitif bir yakınsaklık yarıçapına sahip bir kuvvet serisinin toplamı olduğunu varsayalım. Yani fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots$$

şeklinde yazalım. Şimdi buradaki katsayıları fonksiyonun türevleri üzerinden elde edelim. Bu katsayıları kullanarak Taylor ve Maclaurin serilerini tanımlayalım.

ÖRNEK 4: $f(x) = \ln x$ fonksiyonunun $a = 1$ noktası civarındaki Taylor serisini bulunuz ve bu serinin yakınsama yarıçapını belirleyiniz.

f fonksiyonunun $x = a$ noktasında her mertebeden türevi mevcut olsun. Bu durumda f fonksiyonunu a noktası civarında temsil eden n. dereceden Taylor Polinomu $P_n(x)$ şu şekilde tanımlanır:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$f(x) = e^x$ fonksiyonu için $x = 0$ noktasında üretilen Taylor serisini bulalım. Ardından, bu serinin ilk üç terimini kullanarak $P_0(x)$, $P_1(x)$ ve $P_2(x)$ Taylor polinomlarını yazalım.

ÖRNEK 5: $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun Maclaurin serisi açılımını bulunuz.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 6: $f(x) = x^3 - 5x + 1$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki Taylor açılımını bulunuz.

Hata tahmini

Örnekler üzerinden Taylor serileri için hata tahminlerini inceleyelim.

ÖRNEK 7: $x = 0.2$ değerinde $\cos x$ değerini tahmin etmek için $P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ polinomu kullanıldığında oluşacak hatayı tahmin ediniz.

ÖRNEK 8: $1/e$ değerini, hata payı $1/100$ değerinden daha küçük olacak şekilde yaklaşık olarak hesaplayınız.

ertansinansahin.com

TEOREM: Eğer f fonksiyonu ve onun ilk n türevi olan $f', f'', \cdots, f^{(n)}$, a ve b arasındaki kapalı aralıkta sürekli; $f^{(n)}$ ise a ve b arasındaki açık aralıkta türetilebilir ise, bu durumda a ve b arasında aşağıdaki eşitliği sağlayan bir c sayısı vardır:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

$\cos x$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki Taylor serisinin her x değeri için $\cos x$ fonksiyonuna yakınsadığını gösterelim.

ÖRNEK 9: x değerleri küçük olduğunda $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$ yaklaşımı kullanılır. $|x| < 0.1$ olduğunda bu yaklaşımın hatasını tahmin ediniz.

Taylor Serilerinin Uygulamaları

Binom serisi

$(1+x)^m$ ifadesinin $|x|<1$ için sonsuz seri açılımı şu şekildedir:

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

ÖRNEK 10: $f(x) = \sqrt{1+x}$ fonksiyonu veriliyor.

a. Bu fonksiyonun $x=0$ merkezli Binom serisi açılımının ilk üç terimini yazınız.

b. Benzer şekilde, $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ fonksiyonunun $x=0$ merkezli Binom serisi açılımının ilk üç terimini yazınız.

ertansinansahin.com

Temel olmayan integrallerin hesaplanması

Bir örnek üzerinden Taylor serilerinin integral hesabında nasıl kullandığını inceleyelim.

ÖRNEK 11: $\cos x^3$ fonksiyonunun Maclaurin serisini kullanarak aşağıdaki maddeleri cevaplayınız:

a. $\int \cos x^3\, dx$ belirsiz integralini bir kuvvet serisi olarak ifade ediniz.

b. $\int_0^1 \cos x^3\, dx$ belirli integralinin değerini, hata payı 10^{-2}'ten küçük olacak şekilde tahmin ediniz.

Arktanjantlar

Bir örnek üzerinden Taylor serilerinin arktanjant hesaplarında nasıl kullanıldığını inceleyelim.

ÖRNEK 12: $f(x) = \arctan x$ fonksiyonunun $x=0$ civarındaki Taylor serisini kullanarak, $\frac{\pi}{4}$ değerini 10^{-2} hata payından daha küçük bir hata ile hesaplamak istediğimizi düşünelim.

a. $\arctan x$ fonksiyonunun Taylor serisi açılımını yazınız.

b. $\frac{\pi}{4}$ değerini istenen hassasiyette hesaplamak için serinin kaç teriminin toplanması gerektiğini belirleyiniz.

Belirsiz formların hesaplanması

Bazen belirsiz formları, ilgili fonksiyonları Taylor serisi cinsinden ifade ederek hesaplayabiliriz. Örnekleri inceleyelim.

ÖRNEK 13: Aşağıdaki limiti Taylor serisini kullanarak hesaplayınız:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$

ÖRNEK 14: Aşağıdaki limiti Taylor serisini kullanarak hesaplayınız:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

Euler'in özdeşliği

Euler'in özdeşliğini yazalım ve bu özdeşliği Taylor serileri üzerinden gösterelim.

Önemli Maclaurin serileri ve yakınsaklık yarıçapları:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots,\quad R=1$$

$$\tan^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots,\quad R=1$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots,\quad R=1$$

$$(1+x)^k=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n=1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\cdots,\quad R=1$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots,\quad R=\infty$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots,\quad R=\infty$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots,\quad R=\infty$$

ertansinansahin.com

Alıştırmalar ve Problemler

1. Aşağıda verilen kuvvet serileri için;

i. Yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

ii. Hangi x değerleri için seri mutlak yakınsaktır?

iii. Hangi x değerleri için seri koşullu yakınsaktır?

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 4^n}$

b. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x+1)^n}{\sqrt{n+1}}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 5^n}$

2. Aşağıda verilen serinin yakınsaklık aralığını bulunuz ve bu aralık dahilinde serinin toplamını x'in bir fonksiyonu olarak ifade ediniz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (e^x - 1)^n$$

3. Aşağıda verilen serinin toplamını bulunuz:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n} + \cdots$$

ertansinansahin.com

4. Aşağıdaki fonksiyonların $x = 0$ noktasındaki Taylor serilerini (Maclaurin serileri) bulunuz:

a. $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$ b. $g(x) = e^{-x^2}$

5. $f(x) = \frac{3x^2}{3-x}$ fonksiyonu verilsin.

a. $f(x)$ fonksiyonunun Maclaurin serisini (0 civarındaki Taylor serisi) bulunuz.

b. Bu serinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

6. $G(x) = \int_0^x \sin t^2 \, dt$ olarak verilsin.

a. $G(x)$ fonksiyonunun Maclaurin serisini (0 civarındaki Taylor serisi) bulunuz. (Bilinen fonksiyonların Maclaurin serilerini kullanabilirsiniz.)

b. $G(1)$ değerini, hata 0.001'den küçük olacak şekilde yaklaşık olarak hesaplayınız.

ertansinansahin.com

Cevaplar

Örnek sorular

1 a. $[-1,1]$ b. $(-\infty,\infty)$ c. $\{0\}$

2 $f(x)=\arctan x$

3 Videoya gidiniz.

4 a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$ b. $R=1$

5 $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$

6 $f(x)=-3-2(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3$

7 Hata $\le\frac{(0.2)^4}{24}$

8 $\frac{3}{8}$

9 Hata $\le\frac{e^{0.1}}{6000}$

10 a. $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$ b. $1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4$

11 a. $C+x-\frac{x^7}{7\cdot 2!}+\frac{x^{13}}{13\cdot 4!}-\cdots$ b. ≈ 0.929

12 a. $\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

b. $n=50$ terim (son terim $\frac{1}{99}$)

13 $\frac{1}{2}$

14 $\frac{1}{6}$

Alıştırmalar ve problemler

1 a. i. $R=4$, $[-1,7)$ ii. $(-1,7)$ iii. $x=-1$

b. i. $R=1/2$, $(-1,0]$ ii. $(-1,0)$ iii. $x=0$

c. i. $R=5$, $[-5,5]$ ii. $[-5,5]$ iii. $\emptyset$

2 $(-\infty,\ln 2)$, $f(x)=\frac{1}{2-e^x}$

3 Toplam $=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

4 a. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}$ b. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$

5 a. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{3^n}$

b. $(-3,3)$

6 a. $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}$

b. $G(1)\approx\frac{13}{42}\approx 0.3095$

ertansinansahin.com

9. ÜNİTE

PARAMETRİK DENKLEMLER VE KUTUPSAL KOORDİNATLAR

video izle

Düzlem Eğrilerinin Parametrizasyonu

TANIM: t değişkeni belirli bir aralıkta değerler alırken, $x = f(t)$ ve $y = g(t)$ denklemleriyle belirlenen (x, y) noktalar kümesine parametrik eğri denir. Bu denklemlere ise eğrinin parametrik denklemleri adı verilir.

ÖRNEK 1: $y = x^2$ denklemi ile verilen parabolik eğriyi göz önüne alarak aşağıdaki soruları yanıtlayınız:

a. $x = t$ parametresini kullanarak eğrinin $t \in (-\infty, \infty)$ aralığındaki parametrik denklemlerini yazınız.

b. $x = \sqrt{t}$ parametrizasyonunu kullanarak eğrinin $t \geq 0$ için parametrik denklemlerini yazınız ve bu parametrizasyonun eğrinin hangi kısmını temsil ettiğini belirtiniz.

ÖRNEK 2: Aşağıda verilen parametrik denklemlerle tanımlanan eğriyi çiziniz:

$$x = t^2 - 1, \quad y = t + 2, \quad -2 \leq t \leq 2$$

ÖRNEK 3: Aşağıda verilen parametrik denklemlerle tanımlanan eğriyi çiziniz:

$$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

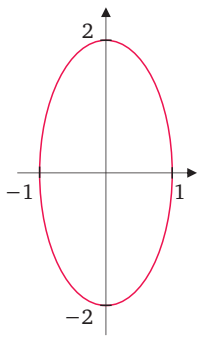
ÖRNEK 4: Aşağıda verilen parametrik denklemleri numaralandırılmış parametrik eğrilerle eşleştiriniz.

a. $x = t, \quad y = t\cos t^2$

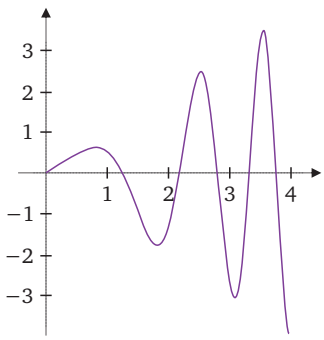
b. $x = t, \quad y = \sqrt{1 - t^2}$

c. $x = \sin t, \quad y = 2\cos t$

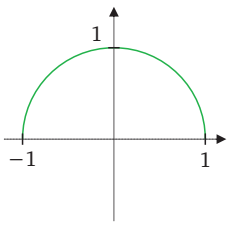
d. $x = t\sin t, \quad y = t\cos t$



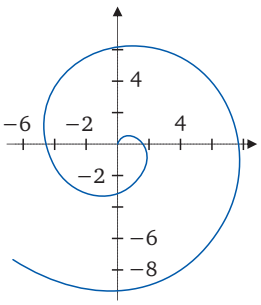
I



II



III



IV

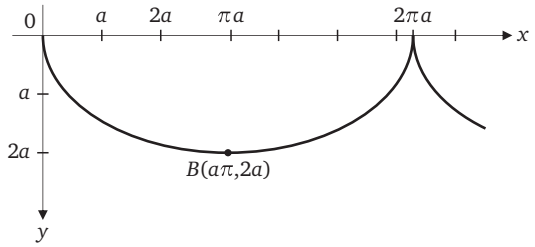
ertansinansahin.com

Sikloit

Bir örnek üzerinden sikloit eğrisini inceleyelim.

ÖRNEK 5: a yarıçaplı bir tekerlek, yatay bir doğru boyunca kaymadan yuvarlanmaktadır. Başlangıçta tekerleğin merkezinin tam altında bulunan tekerlek üzerindeki bir P noktasının izlediği yolun parametrik denklemlerini elde ediniz. P noktası başlangıçta orijindedir.

Brakistokron ve eşoylum eğrilerini inceleyelim.



Parametrik Eğrilerle Kalkülüs

Teğet doğruları ve alanlar

$\frac{dy}{dx}$ ve $\frac{d^2y}{dx^2}$ için parametrik formülleri türetelim.

ÖRNEK 6: $x = 2\cos t$ ve $y = 3\sin t$ denklemleri ile verilen eliptik eğrinin $t = \pi/6$ parametre değerine karşılık gelen noktasındaki teğet doğrusunun denklemini bulunuz.

ÖRNEK 7: $x = t^2 + 1$ ve $y = t^3 + t$ olarak verilen parametrik eğri için $\frac{d^2y}{dx^2}$ ifadesini t cinsinden bulunuz.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 8: Parametrik denklemleri $x = 2\cos t$ ve $y = 2\sin t$ $(0 \leq t \leq \pi/2)$ olan eğri ile eksenler arasında kalan bölgenin alanını integral yardımıyla hesaplayınız.

Parametrik olarak tanımlanmış bir eğrinin uzunluğu

Parametrik olarak tanımlanmış bir eğrinin uzunluğunu nasıl bulacağımızı inceleyelim.

ÖRNEK 9: $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ eğrisinin $0 \leq t \leq \pi$ aralığındaki uzunluğunu hesaplayınız.

Dönel Yüzey Alanları

Parametrik eğriler için dönel yüzey alanı hesabının nasıl yapılacağını inceleyelim.

ÖRNEK 10: $x = \cos^3 t$ ve $y = \sin^3 t$ parametrik denklemleri ile verilen eğrinin $0 \leq t \leq \pi/2$ aralığındaki parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını hesaplayınız.

ertansinansahin.com

Kutupsal Koordinatlar

Kutupsal koordinatları tanımlayalım.

ÖRNEK 11: $P(3, \pi/4)$ noktasının tüm kutupsal koordinatlarını bulunuz.

Aşağıdaki kutupsal denklemlerin karşılık geldiği grafikleri çizelim.

a. $r = 1$ ve $r = -1$

b. $\theta = \pi/4$, $\theta = 5\pi/4$ ve $\theta = -\pi/4$

c. $2 \leq r \leq 4$ ve $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$

d. $-2 \leq r \leq 1$ ve $\theta = \frac{\pi}{6}$

e. $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$

Kutupsal koordinatlarla Kartezyen koordinatlar arasındaki dönüşümleri elde edelim.

ÖRNEK 12: $(x-2)^2 + y^2 = 4$ denklemi ile verilen çemberin kutupsal denklemini bulunuz.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 13: Aşağıda verilen kutupsal denklemleri eşdeğer Kartezyen denklemlere dönüştürünüz ve grafiklerini tanımlayınız.

a. $r \sin\theta = 5$

b. $r^2 = -6r \sin\theta$

c. $r = \frac{6}{3\cos\theta + 2\sin\theta}$

Kutupsal Koordinat Denklemlerinin Grafiğinin Çizilmesi

Kutupsal Koordinatlarda simetri testlerini inceleyelim.

I. x-eksenine göre simetri: Eğer (r,θ) noktası grafiğin üzerindeyse, $(r,-\theta)$ veya $(-r,\pi-\theta)$ noktası da grafik üzerinde yer alır.

II. y-eksenine göre simetri: Eğer (r,θ) noktası grafiğin üzerindeyse, $(r,\pi-\theta)$ veya $(-r,-\theta)$ noktası da grafik üzerinde yer alır.

III. Orijine göre simetri: Eğer (r,θ) noktası grafiğin üzerindeyse, $(-r,\theta)$ veya $(r,\theta+\pi)$ noktası da grafik üzerinde yer alır.

$r=f(\theta)$ şeklinde verilen kutupsal bir eğrinin eğimini elde edelim.

Eğer $r=f(\theta)$ eğrisi orijinden geçiyorsa bu noktadaki eğimini bulalım.

ÖRNEK 14: $r=1-\cos\theta$ denklemi ile verilen eğriyi Kartezyen xy-düzleminde çiziniz.

Kutupsal Koordinatlarda Alanlar ve Uzunluklar

Alan hesabı için gerekli olan alan diferansiyelini elde edelim.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 15: $r=2(1+\sin\theta)$ kardiyoidi tarafından xy-düzleminde sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

$0 \le r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$ ve $\alpha \le \theta \le \beta$ arasında kalan bölgenin alanı için genel bir integral yazalım.

ÖRNEK 16: Kutupsal koordinat sisteminde $r_1(\theta) = 2 + 2\cos\theta$ kardiyoidi ile $r_2(\theta) = 2$ çemberi tarafından sınırlanan bölgeyi göz önüne alarak; çemberin dışında, kardiyoidin ise içinde kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

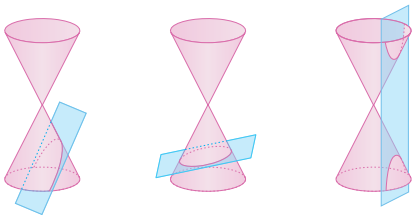
Kutupsal bir eğrinin uzunluğunu nasıl bulacağımızı inceleyelim.

ÖRNEK 17: $r = 1 + \cos\theta$ denklemi ile verilen kardiyoit eğrisinin toplam uzunluğunu hesaplayınız.

ertansinansahin.com

Konik Kesitleri

Parabol, elips ve hiperbolü geometrik olarak tanımlayıp şekilleri inceleyelim.



parabol elips hiperbol

Parabol

TANIM: Bir düzlem içerisinde, belirlenmiş sabit bir noktaya ve sabit bir doğruya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerine parabol denir. Bu sabit nokta parabolün odağı, sabit doğru ise parabolün doğrultmanı olarak adlandırılır.

ÖRNEK 18: $x^2 = -12y$ denklemi ile verilen parabolün odak noktasını ve doğrultman denklemini bulunuz.

ertansinansahin.com

Elips

TANIM: Düzlemdeki iki sabit noktaya olan uzaklıklarının toplamı sabit olan noktalar kümesine elips denir. Bu iki sabit nokta elipsin odakları olarak adlandırılır. Elipsin odaklarından geçen doğruya odak ekseni, bu eksen üzerinde odakların tam ortasında bulunan noktaya ise merkez denir. Odak ekseni ile elipsin kesiştiği noktalara ise elipsin köşeleri adı verilir.

ÖRNEK 19: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ denklemi ile verilen elips için aşağıdaki değerleri hesaplayınız:

a. Yarı büyük eksen (a) ve yarı küçük eksen (b) uzunluklarını bulunuz.

b. Merkezden odağa olan mesafeyi (c) hesaplayınız.

c. Elipsin odak noktalarının koordinatlarını yazınız.

d. Elipsin köşe noktalarının koordinatlarını yazınız.

e. Elipsin merkezini belirtiniz.

Hiperbol

TANIM: Hiperbol, düzlemdeki iki sabit nokta olan odaklar ile arasındaki uzaklık farkı sabit olan noktalar kümesidir. Odak noktalarından geçen doğruya odak ekseni denir. Odaklar arasındaki mesafenin tam orta noktası hiperbolün merkezidir. Odak ekseni ile hiperbol eğrisinin kesiştiği noktalar ise köşeler olarak adlandırılır.

ÖRNEK 20: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ denklemi ile verilen hiperbolün aşağıda belirtilen karakteristik özelliklerini bulunuz.

a. Merkez
b. Köşeler
c. Odaklar
d. Asimptotlar

ertansinansahin.com

Parabol, elips ve hiperbol için yazdığımız denklemlerde x ve y'nin yer değiştirmesi durumunda neler olacağını tartışalım.

Kutupsal Koordinatlarda Konikler

Dışmerkezlik

Konik kesitlerde dışmerkezlik e ile gösterilir.

$a > b$ olmak üzere $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi için

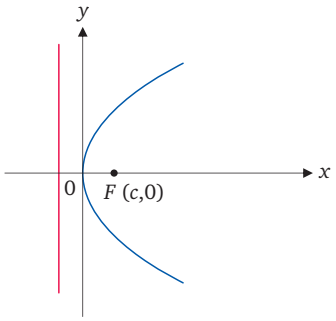
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

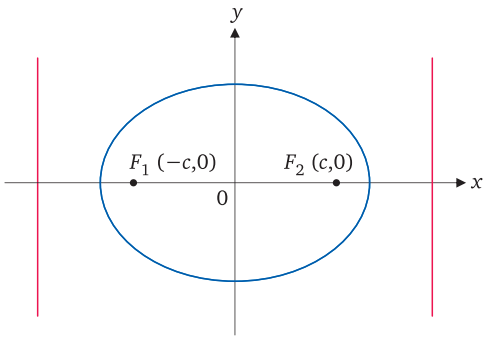
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolü için

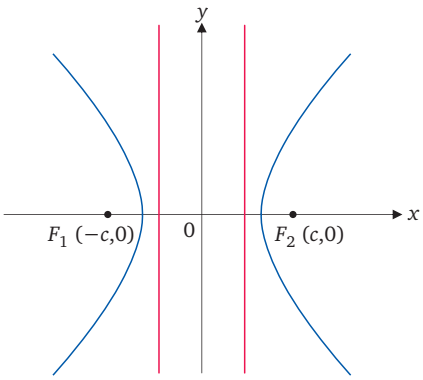
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a},$$

parabolde ise $e = 1$'dir.

Aşağıdaki şekiller üzerinden dışmerkezlik değerini detaylı bir şekilde inceleyelim.







ÖRNEK 21: Merkezi orijinde olan, odak noktalarından biri $(5,0)$ noktasında bulunan ve bu odağa karşılık gelen doğrultman doğrusu $x = \frac{9}{5}$ olan hiperbolün Kartezyen denklemini bulunuz.

ertansinansahin.com

Kutupsal denklemler

Bir parabolün, elipsin ya da hiperbolün kutupsal denklemini nasıl elde edeceğimizi görelim.

ÖRNEK 22: Dışmerkezliği $e = 2$ olan ve $x = 3$ doğrusunu doğrultman kabul eden hiperbolün standart denklemini bulunuz. Hiperbolün odağı orijindedir.

ÖRNEK 23: Denklemi $r = \frac{12}{3-6\cos\theta}$ olan eğriyi ele alınız.

a. Bu konik kesitin dışmerkezliğini (e) bularak türünü belirleyiniz.

b. Doğrultman doğrusunun denklemini bulunuz.

c. Eğrinin x-ekseni üzerindeki köşelerini belirleyiniz.

Dışmerkezliği e ve yarı büyük ekseni a olan elipsin kutupsal denklemini elde edelim.

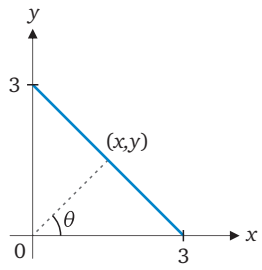
Bir doğrunun kutupsal koordinatlardaki denklemini elde edelim.

ertansinansahin.com

Bir çemberin kutupsal koordinatlardaki denklemini elde edelim.

Alıştırmalar ve Problemler

1. $(0,3)$ ve $(3,0)$ noktalarını birleştiren doğru parçasını, şekildeki gibi orijinden geçen θ açısını parametre olarak kullanarak parametrize ediniz.



2. $(x+3)^2+(y-1)^2=4$ çemberi için $(-1,1)$ noktasından başlayan, saat yönünde çember etrafında bir tam tur atan ve parametre olarak merkez açısı θ'yı kullanan bir parametrizasyon bulunuz.

3. $r^2=\sin\theta$ denklemi ile verilen eğriyi Kartezyen xy-düzleminde çiziniz.

4. Kutupsal denklemi $r=4\cos\theta$ olarak verilen çemberin, $\pi/6\le\theta\le\pi/3$ aralığında kalan bölgesinin alanını hesaplayınız.

ertansinansahin.com

5. $x^2-4y^2-4x+8y-4=0$ denkleminin bir hiperbol belirttiğini gösteriniz. Bu hiperbolün merkezini, odak noktalarını ve asimptotlarını bulunuz.

6. Dışmerkezliği $e=\frac{3}{5}$ olan ve odak noktalarından biri kutupsal koordinat düzleminin başlangıç noktasında (orijinde) bulunan bir konik kesitin, bu odağa karşılık gelen doğrultman denklemi $r\cos\theta=10$ olarak verilmiştir. Bu konik kesit için bir kutupsal denklem bulunuz.

ertansinansahin.com

Cevaplar

Örnek sorular

1	a. $x=t,\quad y=t^2,\quad t\in\mathbb{R}$ b. $x=\sqrt{t},\quad y=t,\quad x\geq 0$ (Sağ kol)
2	Videoya gidiniz.
3	Videoya gidiniz.
4	a. II b. III c. I d. IV
5	$x=a(\theta-\sin\theta)\quad y=a(1-\cos\theta)$
6	$y=-\frac{3\sqrt{3}}{2}x+6$
7	$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3t^2-1}{4t^3}$
8	$A=\pi$
9	$L=\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$
10	$S=\frac{6\pi}{5}$
11	$(3,\frac{\pi}{4}+2n\pi)$ ve $(-3,\frac{5\pi}{4}+2n\pi),\ n\in\mathbb{Z}$
12	$r=4\cos\theta$
13	a. $y=5$, doğru b. $x^2+(y+3)^2=9$, çember c. $3x+2y=6$, doğru
14	Videoya gidiniz.
15	$A=6\pi$
16	$A=8+\pi$
17	$L=8$
18	Odak: $(0,-3)$ Doğrultman: $y=3$
19	a. $a=5,\ b=3$ b. $c=4$ c. $(4,0)$ ve $(-4,0)$ d. $(5,0)$ ve $(-5,0)$ e. $(0,0)$
20	a. $M(0,0)$ b. $V_1(-3,0),\ V_2(3,0)$ c. $F_1(-5,0),\ F_2(5,0)$ d. $y=\pm\frac{4}{3}x$
21	$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$
22	$r=\frac{6}{1+2\cos\theta}$

23	a. $e = 2$, Hiperbol b. $x = -2$ c. $(-4,0)$ ve $(-\frac{4}{3},0)$

Alıştırmalar ve problemler

1	$x = \frac{3\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$, $y = \frac{3\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$
2	$x = -3 + 2\cos\theta$, $y = 1 - 2\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$
3	Videoya gidiniz.
4	$A = \frac{2\pi}{3}$
5	Merkez: $(2,1)$ Odaklar: $(2 \pm \sqrt{5},1)$ Asimptotlar: $y - 1 = \pm\frac{1}{2}(x-2)$
6	$r = \frac{30}{5+3\cos\theta}$

ertansinansahin.com

KALKÜLÜS 1–2

TÜRKÇE-İNGİLİZCE TERİM KARŞILIKLARI

1. Ünite: Limitler ve Süreklilik

Limit Limit

Limit kuralları Limit laws

Ortalama değişim oranı Average rate of change

Anlık değişim oranı Instantaneous rate of change

Kiriş doğrusu Secant line

Teğet doğrusu Tangent line

Sıkıştırma teoremi Sandwich theorem

Limitin tam tanımı Precise definition of a limit

Tek taraflı limit One-sided limit

Sağdan limit Right-hand limit

Soldan limit Left-hand limit

Sonsuzdaki limit Limit at infinity

Sonsuz limit Infinite limit

Yatay asimptot Horizontal asymptote

Düşey asimptot Vertical asymptote

Eğik asimptot Oblique asymptote

Süreklilik Continuity

Sürekli fonksiyon Continuous function

Süreksizlik Discontinuity

Kaldırılabilir süreksizlik Removable discontinuity

Sıçrama süreksizliği Jump discontinuity

Sonsuz süreksizlik Infinite discontinuity

Salınımlı süreksizlik Oscillating discontinuity

Sürekli genişleme Continuous extension

Ara değer teoremi Intermediate value theorem

Tam değer fonksiyonu Greatest integer function

ertansinansahin.com

2. Ünite: Türev

Türev Derivative

Türev alma Differentiation

Türevlenebilir Differentiable

Fark bölümü Difference quotient

Bir noktadaki eğim Slope at a point

Normal doğrusu Normal line

Köşe Corner

Sivri uç Cusp

Kuvvet kuralı Power rule

Çarpım kuralı Product rule

Bölüm kuralı Quotient rule

Yüksek mertebeden türev Higher-order derivative

Değişim oranı Rate of change

Konum Position

Yer değiştirme Displacement

Hız Velocity

Sürat Speed

İvme Acceleration

Silkme Jerk

Zincir kuralı Chain rule

Kapalı türev Implicit differentiation

Ters trigonometrik fonksiyon Inverse trigonometric function

İlişkili oranlar Related rates

Doğrusallaştırma Linearization

Diferansiyel Differential

3. Ünite: Türev Uygulamaları

Mutlak (global) maksimum Absolute (global) maximum

Mutlak (global) minimum Absolute (global) minimum

Yerel maksimum Local maximum

Yerel minimum Local minimum

Ekstremum değer Extreme value

Uç değer teoremi Extreme value theorem

Kritik nokta Critical point

Rolle teoremi Rolle's theorem

Ortalama değer teoremi Mean value theorem

Artan fonksiyon Increasing function

Azalan fonksiyon Decreasing function

Birinci türev testi First derivative test

İkinci türev testi Second derivative test

Konkavlık Concavity

Yukarı konkav Concave up

Aşağı konkav Concave down

Dönüm noktası Point of inflection

Belirsiz biçim Indeterminate form

L'Hôpital kuralı L'Hôpital's rule

Optimizasyon Optimization

Newton yöntemi Newton's method

Ters türev Antiderivative

4. Ünite: İntegral

Alan Area

Sonlu toplam Finite sum

Alt toplam Lower sum

Üst toplam Upper sum

Sigma gösterimi Sigma notation

Bölüntü Partition

Bölüntünün normu Norm of a partition

Riemann toplamı Riemann sum

İntegrallenebilir Integrable

İntegral sınırları Limits of integration

Bir fonksiyonun ortalama değeri Average value of a function

Kalkülüsün temel teoremi Fundamental theorem of calculus

Toplam alan Total area

Eğriler arasındaki alan Area between curves

5. Ünite: İntegrasyon Uygulamaları

Hacim Volume

Kesit alanı Cross-sectional area

Dilimleme yöntemi Method of slicing

Dönel cisim Solid of revolution

Dönme ekseni Axis of revolution

Disk yöntemi Disk method

Pul yöntemi Washer method

Silindirik kabuk yöntemi Shell method

Silindirik kabuk Cylindrical shell

Eğri uzunluğu Arc length

Yay uzunluğu diferansiyeli Arc length differential

Düzgün (pürüzsüz) eğri Smooth curve

Dönel yüzey Surface of revolution

Yüzey alanı Surface area

İş Work

Yay sabiti (katsayısı) Spring constant

Hooke yasası Hooke's law

Akışkan basıncı Fluid pressure

Akışkan kuvveti Fluid force

Ağırlık yoğunluğu Weight density

Moment Moment

Kütle merkezi Center of mass

Ağırlık merkezi (geometrik merkez) Centroid

Yoğunluk Density

İnce levha Thin plate

ertansinansahin.com

6. Ünite: İntegraller ve Aşkın Fonksiyonlar

Aşkın fonksiyon Transcendental function

Doğal logaritma Natural logarithm

Üstel fonksiyon Exponential function

Logaritmik türev alma Logarithmic differentiation

Ters fonksiyon Inverse function

Üstel büyüme Exponential growth

Üstel azalma (azalış) Exponential decay

Yarılanma ömrü (yarı ömür) Half-life

Diferansiyel denklem Differential equation

Ayrılabilir diferansiyel denklem Separable differential equation

Başlangıç değer problemi Initial value problem

Newton soğuma yasası Newton's law of cooling

Hiperbolik fonksiyon Hyperbolic function

Hiperbolik sinüs Hyperbolic sine

Hiperbolik kosinüs Hyperbolic cosine

Ters hiperbolik fonksiyon Inverse hyperbolic function

Zincir eğrisi (katener) Catenary

Göreli büyüme oranı Relative rate of growth

Daha hızlı büyümek Grow faster

Aynı hızda büyümek Grow at the same rate

7. Ünite: İntegrasyon Teknikleri

Belirsiz integral Indefinite integral

Belirli integral Definite integral

İntegrand (tümlevlenen) Integrand

Değişken değiştirme Substitution

Kısmi integrasyon Integration by parts

Tablo yöntemi Tabular integration

İndirgeme formülü Reduction formula

Trigonometrik integral Trigonometric integral

Trigonometrik değişken değiştirme Trigonometric substitution

Kısmi kesirler Partial fractions

Kısmi kesirlere ayrıştırma Partial fraction decomposition

Rasyonel fonksiyon Rational function

Basit (has) kesir Proper fraction

İndirgenemez ikinci derece çarpan Irreducible quadratic factor

İntegral tablosu Table of integrals

Bilgisayar cebiri sistemi Computer algebra system

Sayısal integrasyon Numerical integration

Yamuk kuralı Trapezoidal rule

Simpson kuralı Simpson's rule

Hata sınırı Error bound

Has olmayan integral Improper integral

Yakınsak integral Convergent integral

Iraksak integral Divergent integral

Doğrudan karşılaştırma testi Direct comparison test

Limit karşılaştırma testi Limit comparison test

ertansinansahin.com

8. Ünite: Sonsuz Diziler ve Seriler

Dizi Sequence

Terim Term

Dizinin limiti Limit of a sequence

Yakınsak Convergent

Iraksak Divergent

Yakınsaklık Convergence

Iraksaklık Divergence

Monoton dizi Monotonic sequence

Sınırlı dizi Bounded sequence

Monoton dizi teoremi Monotonic sequence theorem

Özyinelemeli tanım Recursive definition

Sonsuz seri Infinite series

Kısmi toplam Partial sum

Geometrik seri Geometric series

Ortak oran Common ratio

Teleskopik seri Telescoping series

Harmonik seri Harmonic series

p-serisi p-series

Iraksaklık için n. terim testi nth-term test for divergence

İntegral testi Integral test

Karşılaştırma testi Comparison test

Oran testi Ratio test

Kök (Cauchy kök) testi Root test

Mutlak yakınsaklık Absolute convergence

Koşullu yakınsaklık Conditional convergence

Alterne (almaşık) seri Alternating series

Alterne (almaşık) seri testi Alternating series test

Kuvvet serisi Power series

Yakınsaklık yarıçapı Radius of convergence

Yakınsaklık aralığı Interval of convergence

Taylor serisi Taylor series

Maclaurin serisi Maclaurin series

Taylor polinomu Taylor polynomial

Kalan terim Remainder

Binom serisi Binomial series

Kalan tahmin teoremi Remainder estimation theorem

9. Ünite: Parametrik Denklemler ve Kutupsal Koordinatlar

Parametrik denklem Parametric equation

Parametre Parameter

Parametre aralığı Parameter interval

Parametrizasyon (parametrelendirme) Parametrization

Parametrik eğri Parametric curve

Başlangıç noktası Initial point

Bitiş noktası Terminal point

Sikloit Cycloid

Kutupsal koordinatlar Polar coordinates

Kutup Pole

Kutupsal eksen Polar axis

Kutupsal denklem Polar equation

Kardiyoit (kalp eğrisi) Cardioid

Gül eğrisi Rose curve

Limason Limaçon

Lemniskat Lemniscate

Simetri testi Symmetry test

Konik kesit Conic section

Parabol Parabola

Elips Ellipse

Hiperbol Hyperbola

Odak Focus

Doğrultman Directrix

Tepe noktası Vertex

Asimptot Asymptote

Dışmerkezlik Eccentricity

Büyük eksen Major axis

Küçük eksen Minor axis

ertansinansahin.com

10. Ünite: Vektörler ve Uzay Geometrisi

Üç boyutlu koordinat sistemi Three-dimensional coordinate system

Sağ el kuralı Right-hand rule

Sekizde bir bölge Octant

Vektör Vector

Skaler Scalar

Bileşen Component

Birim vektör Unit vector

Standart birim vektörler Standard unit vectors

Uzunluk Length

Yön Direction

Nokta (iç) çarpımı Dot product

Skaler çarpım Scalar product

Vektörel (dış) çarpım Cross product

Vektör izdüşümü Vector projection

Skaler bileşen Scalar component

Dik (dikgen) vektörler Orthogonal vectors

Paralel vektörler Parallel vectors

Üçlü skaler çarpım Triple scalar product

Paralelkenar Parallelogram

Paralelyüzlü Parallelepiped

Doğru Line

Düzlem Plane

Normal vektör Normal vector

Aykırı doğrular Skew lines

Silindir Cylinder

Kuadrik (ikinci dereceden) yüzey Quadric surface

Elipsoit Ellipsoid

Paraboloit Paraboloid

Hiperboloit Hyperboloid

Hiperbolik paraboloit Hyperbolic paraboloid

Koni Cone

11. Ünite: Vektör Değerli Fonksiyonlar ve Uzayda Hareket

Vektör değerli fonksiyon Vector-valued function

Uzay eğrisi Space curve

Teğet vektör Tangent vector

Teğet doğru Tangent line

Hız vektörü Velocity vector

İvme vektörü Acceleration vector

Sürat Speed

Helis Helix

Eğik atış hareketi Projectile motion

Yay uzunluğu parametresi Arc length parameter

Birim teğet vektör Unit tangent vector

Eğrilik Curvature

Eğrilik yarıçapı Radius of curvature

Eğrilik merkezi Center of curvature

Eğrilik çemberi Circle of curvature

Birim normal vektör Principal unit normal vector

Binormal vektör (ikincil dikme) Binormal vector

Burulma Torsion

TNB çatısı TNB frame

Teğetsel bileşen Tangential component

Normal bileşen Normal component

Kepler yasaları Kepler's laws

12. Ünite: Kısmi Türevler

Çok değişkenli fonksiyon Function of several variables

Tanım kümesi Domain

Görüntü kümesi Range

Seviye (düzey) eğrisi Level curve

Seviye (düzey) yüzeyi Level surface

Kontur çizgisi Contour line

İç nokta Interior point

Sınır noktası Boundary point

Açık bölge Open region

Kapalı bölge Closed region

Sınırlı bölge Bounded region

İki yol testi Two-path test

Kısmi türev Partial derivative

İkinci mertebe kısmi türev Second-order partial derivative

Karışık türev Mixed derivative

Türevlenebilir Differentiable

Zincir kuralı Chain rule

Kapalı türev Implicit differentiation

Yönlü türev Directional derivative

Gradyan Gradient

Gradyan vektörü Gradient vector

Teğet düzlem Tangent plane

Normal doğru Normal line

Doğrusallaştırma Linearization

Toplam diferansiyel Total differential

Yerel maksimum Local maximum

ertansinansahin.com

Yerel minimum Local minimum

Kritik nokta Critical point

Eyer noktası Saddle point

İkinci türev testi Second derivative test

Hessian determinantı Hessian

Mutlak ekstremum Absolute extremum

Lagrange çarpanları Lagrange multipliers

Kısıt Constraint

Kısıtlı değişken Constrained variable

13. Ünite: Katlı İntegraller

Katlı integral Multiple integral

Çift integral Double integral

Yinelenmiş integral Iterated integral

Fubini teoremi Fubini's theorem

Riemann toplamı Riemann sum

İntegrasyon bölgesi Region of integration

İntegrasyon sınırları Limits of integration

İntegrasyon sırası Order of integration

Ortalama değer Average value

Üçlü integral Triple integral

Kutupsal biçimde çift integral Double integral in polar form

Silindirik koordinatlar Cylindrical coordinates

Küresel koordinatlar Spherical coordinates

Hacim elemanı Volume element

Birinci moment First moment

Eylemsizlik momenti (dönme eylemsizliği) Moment of inertia

Değişken değiştirme Change of variables

Jakobiyen Jacobian

Dönüşüm Transformation

ertansinansahin.com

14. Ünite: İntegraller ve Vektör Alanları

Eğrisel (hat) integral Line integral

Vektör alanı Vector field

Gradyan alanı Gradient field

İş Work

Dolanım (dolaşım) Circulation

Akı Flux

Yoldan bağımsızlık Path independence

Korunumlu alan Conservative field

Potansiyel fonksiyon Potential function

Tam diferansiyel Exact differential

Bağlantılı bölge Connected region

Basit bağlantılı bölge Simply connected region

Basit kapalı eğri Simple closed curve

Pozitif yönlendirme Positive orientation

Green teoremi Green's theorem

Rotasyonel (dolam) Curl

Diverjans (ıraksay) Divergence

Parametrize edilmiş yüzey Parametrized surface

Yüzey alanı elemanı Surface area element

Yüzey integrali Surface integral

Yönlendirilebilir yüzey Orientable surface

Stokes teoremi Stokes' theorem

Diverjans teoremi Divergence theorem