ERTAN SİNAN ŞAHİN

KALKÜLÜS 2

Ders Defteri

Bu defter video derslerle birlikte kullanılmak üzere hazırlanmıştır. Her ünitenin başındaki karekod o ünitenin videosuna götürür; sayfadaki boşluklar ders sırasında doldurulur.

ertansinansahin.com

Online Eğitim Seti
ertansinansahin.com
Sürüm 2026-11-06

İÇİNDEKİLER

5 İntegrasyon Uygulamaları 1

Kesit Alanıyla Hacim Hesabı . . . 1
Silindirik Kabuklarla Hacim Hesabı . . . 3
Eğri Uzunluğu . . . 3
Dönel Yüzey Alanları . . . 4
Fiziksel İş ve Basınç Kuvveti Hesaplamaları . . . 4
Moment ve Kütle Merkezi . . . 5
Alıştırmalar ve Problemler . . . 7
Cevaplar . . . 10

7 İntegrasyon Teknikleri 13

Temel İntegrasyon Formüllerinin Kullanımı . . . 13
Kısmi İntegrasyon . . . 14
Trigonometrik İntegraller . . . 16
Trigonometrik Dönüşümler . . . 18
Rasyonel Fonksiyonların Kısmi Kesirlere Ayırarak İntegrasyonu . . . 19
Has Olmayan İntegraller . . . 19
Alıştırmalar ve Problemler . . . 22
Cevaplar . . . 26

8 Sonsuz Diziler ve Seriler 27

Kısım 1 . . . 27
Motivasyon . . . 27
Diziler . . . 27
Sonsuz Seriler . . . 29
İntegral Testi . . . 31
Karşılaştırma Testleri . . . 32
Mutlak Yakınsaklık; Oran ve Kök Testleri . . . 33
Almaşık Seriler ve Koşullu Yakınsaklık . . . 35
Alıştırmalar ve Problemler . . . 36
Cevaplar . . . 39

Kısım 2 . . . 41
Kuvvet Serileri . . . 41
Taylor ve Maclaurin Serileri . . . 43
Taylor Serilerinin Uygulamaları . . . 46
Alıştırmalar ve Problemler . . . 48
Cevaplar . . . 50

9 Parametrik Denklemler ve Kutupsal Koordinatlar 51

Düzlem Eğrilerinin Parametrizasyonu . . . 51
Parametrik Eğrilerle Kalkülüs . . . 52
Kutupsal Koordinatlar . . . 53
Kutupsal Koordinat Denklemlerinin Grafiğinin Çizilmesi . . . 55
Kutupsal Koordinatlarda Alanlar ve Uzunluklar . . . 55
Konik Kesitleri . . . 56
Kutupsal Koordinatlarda Konikler . . . 58
Alıştırmalar ve Problemler . . . 61
Cevaplar . . . 62

10 Vektörler ve Uzay Geometrisi 65

Motivasyon . . . 65
Üç Boyutlu Koordinat Sistemleri . . . 65
Vektörler . . . 66
Nokta Çarpımı . . . 68
Vektörel Çarpım . . . 70
Uzayda Doğrular ve Düzlemler . . . 71
Silindirler ve Kuadrik Yüzeyler . . . 73
Alıştırmalar ve Problemler . . . 75
Cevaplar . . . 77

12 Kısmi Türevler 79

Kısım 1 . . . 79
Motivasyon . . . 79
Çok Değişkenli Fonksiyonlar . . . 79
Yüksek Boyutlarda Limit ve Süreklilik . . . 80
Kısmi Türevler . . . 82
Zincir Kuralı . . . 83

Yönlü Türevler ve Gradyan Vektörleri . . . 84
Alıştırmalar ve Problemler . . . 86
Cevaplar . . . 88
Kısım 2 . . . 89
Teğet Düzlemler ve Diferansiyeller . . . 89
Ekstremum Değerler ve Eyer Noktaları . . . 91
Lagrange Çarpanları . . . 92
Alıştırmalar ve Problemler . . . 93
Cevaplar . . . 95

13 Katlı İntegraller 97

Dikdörtgensel Bölgeler Üzerinde İki Katlı ve İterasyonlu İntegraller . . . 97
Dikdörtgensel Olmayan Bölgelerde İki Katlı İntegraller . . . 97
İki Katlı İntegralle Alan Hesabı . . . 99
Kutupsal Koordinatlarda İki Katlı İntegraller . . . 99
Kartezyen Koordinatlarda Üç Katlı İntegraller . . . 100
Uygulamalar . . . 101
Silindirik ve Küresel Koordinatlarda Üç Katlı İntegraller . . . 102
Çok Katlı İntegrallerde Değişken Dönüşümü . . . 104
Alıştırmalar ve Problemler . . . 105
Cevaplar . . . 107

14 İntegraller ve Vektör Alanları 109

Skaler Fonksiyonların Eğrisel İntegralleri . . . 109
Vektör Alanları ve Eğrisel İntegralleri . . . 110
Yoldan Bağımsızlık, Korunumlu Alanlar ve Potansiyel Fonksiyonlar . . . 111
Düzlemde Green Teoremi . . . 113
Yüzeyler ve Alan . . . 114
Yüzey İntegralleri . . . 115
Stokes Teoremi . . . 117
Diverjans Teoremi . . . 118
Alıştırmalar ve Problemler . . . 121
Cevaplar . . . 122

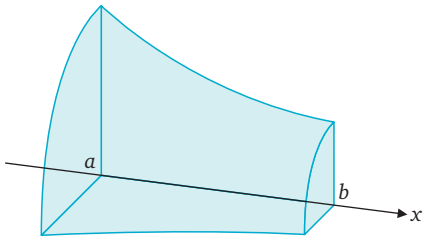
Türkçe–İngilizce Terim Karşılıkları 123

5. ÜNİTE
İNTEGRASYON UYGULAMALARI

video izle

Kesit Alanıyla Hacim Hesabı

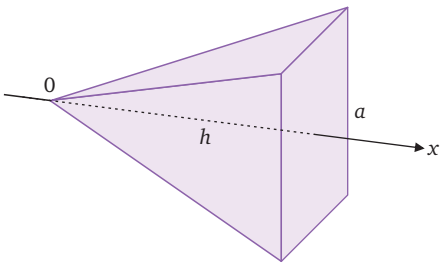
Paralel yüzeylerle dilimleme yaparak hacim hesabının nasıl yapılacağını tartışalım. Hacmin matematiksel tanımını yapalım.



TANIM: $x = a$'dan $x = b$'ye kadar olan, integrallenebilir bir $A(x)$ kesit alanına sahip katı bir cismin hacmi, A fonksiyonunun a'dan b'ye kadar olan integralidir:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

ÖRNEK 1: Taban kenar uzunluğu a ve yüksekliği h olan bir kare dik piramidin hacmini hesaplayınız.

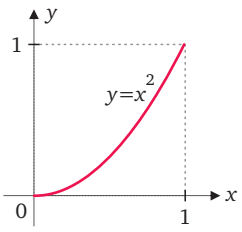


ertansinansahin.com

Dönel cisimler: disk yöntemi

Dönel cisimlerin ne olduğunu ve nasıl elde edildiğini inceleyelim. Hacim hesaplamada kullanılan disk yöntemini açıklayalım ve matematiksel olarak ifade edelim.

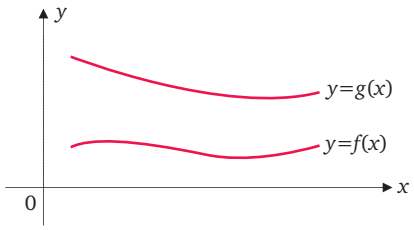
ÖRNEK 2: $y = x^2$ eğrisi, $0 \le x \le 1$ aralığı ve x-ekseni arasında kalan bölge, bir katı cisim oluşturmak üzere x-ekseni etrafında döndürülüyor. Oluşan bu dönel cismin hacmini integral yardımıyla hesaplayınız.



ÖRNEK 3: $y=\sqrt{x}$ eğrisi, $y=2$ doğrusu ve $x=0$ doğrusu ile sınırlanan bölgeyi göz önüne alınız. Bu bölgenin $y=2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini veren integrali yazınız.

Dönel cisimler: pul yöntemi

İçinde boşluk kalan dönel cisimlerin hacimlerinin pul yöntemiyle nasıl hesaplandığını inceleyelim.



y-ekseni etrafında dönme durumu için hacim hesabını matematiksel olarak ifade edelim.

ÖRNEK 5: $y=e^x$ eğrisi, $y=x+1$ doğrusu ve $x=1$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgeyi göz önüne alınız. Bu bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini veren integrali yazınız.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 4: $x=y^2$ parabolü ile $x=1$ doğrusu arasında kalan bölgeyi göz önüne alınız. Bu bölgenin $x=1$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini veren integrali yazınız.

ÖRNEK 6: $x=y^2$ parabolü ile $x=1$ doğrusu arasında kalan bölgeyi göz önüne alınız. Bu bölgenin $x=2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini veren integrali yazınız.

Silindirik Kabuklarla Hacim Hesabı

$y = 4 - x^2$ parabolü ile x-ekseni arasında kalan bölgeyi $x = 3$ doğrusu etrafında döndürerek bir dönel cisim elde edelim. Bu cismin hacmini nasıl bulabileceğimizi tartışalım.

Silindirik kabuk yöntemini matematiksel olarak ifade edelim.

ÖRNEK 7: $y = \sqrt{x}$ eğrisi, x-ekseni ve $x = 1$ doğrusu arasında kalan bölgeyi göz önüne alınız. Bu bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini veren integrali silindirik kabuk yöntemiyle yazınız.

ÖRNEK 8: $x = y - y^2$ eğrisi ile y-ekseni arasında kalan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini veren integrali silindirik kabuk yöntemiyle yazınız.

Eğri Uzunluğu

Bir eğrinin uzunluğunun nasıl elde edileceğini tartışalım. Ardından bir eğrinin uzunluğunu tanımlayalım.

ertansinansahin.com

TANIM: Eğer f' türevi $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ise, $y = f(x)$ eğrisinin $A = (a, f(a))$ noktasından $B = (b, f(b))$ noktasına kadar olan uzunluğu, aşağıdaki integralin değeridir:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

ÖRNEK 9: $y = x^2 - x$ eğrisinin $x = 0$ ile $x = 2$ aralığındaki uzunluğunu veren integrali yazınız.

ÖRNEK 10: $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ eğrisinin $x = 0$ ile $x = 3$ aralığındaki uzunluğunu bulunuz.

Dönel Yüzey Alanları

Dönel cisimlerin yüzey alanını nasıl elde edeceğimizi tartışalım. Ardından dönel cisimler için yüzey alanının matematiksel tanımını inceleyelim.

TANIM: Eğer $f(x) \geq 0$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli türetilebilir ise, $y = f(x)$ grafiğinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzey alanı aşağıdaki integralin değeridir:

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

ÖRNEK 11: $y = \sqrt{x}$ eğrisinin $1 \leq x \leq 2$ aralığındaki parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını bulunuz.

ertansinansahin.com

Fiziksel İş ve Basınç Kuvveti Hesaplamaları

Değişken bir $F(x)$ kuvvetinin bir nesneyi $x = a$ noktasından $x = b$ noktasına kadar hareket ettirirken yaptığı toplam işi tanımlayalım.

ÖRNEK 12: Doğal boyu 40 cm ve kuvvet sabiti $k = 300$ N/m olan bir yayı 20 cm uzunluğa sıkıştırmak için gereken işi bulunuz.

ÖRNEK 13: Birim uzunluktaki kütlesi 0.1 kg/m olan 10 m uzunluğundaki bir ip, bir binanın tepesinden sarkıtılmaktadır. Bu ipin tamamını binanın tepesine çekmek için yapılması gereken iş kaç jouledür? (Yerçekimi ivmesinin büyüklüğünü $g = 10\ \text{m/s}^2$ alınız.)

ÖRNEK 14: Boyutları 8 m × 12 m ve derinliği 2 m olan dikdörtgenler prizması şeklindeki tam dolu bir havuzun suyu, havuzun üst kenar seviyesine pompalanarak boşaltılacaktır. Suyun özgül ağırlığının 10 kN/m^3 olduğu varsayılırsa bu işlem için yapılması gereken iş kaç jouledür?

Basınç kuvveti hesabı yaparken integralden nasıl yararlanacağımızı inceleyelim.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 15: Tabanı 3 m ve yüksekliği 2 m olan ikizkenar üçgen şeklindeki düz bir levha, tabanı yukarıda olacak şekilde suyun içine dikey olarak yerleştirilmiştir. Levhanın üst kenarı (üçgen tabanı), su yüzeyinin 1 m altındadır. Suyun öz ağırlığının 10 kN/m^3 olduğu varsayıldığında, suyun levhanın bir yüzüne uyguladığı toplam kuvveti bulunuz.

Moment ve Kütle Merkezi

Tek boyutlu bir cismin kütle merkezini nasıl bulacağımızı ve moment kavramını tartışalım. Kütle merkezinin konumunu matematiksel olarak ifade edelim.

ÖRNEK 16: Konuma bağlı kütle yoğunluğu $\delta(x) = 4 + 2x^3$ olan ve x-ekseni üzerinde $[0, 2]$ aralığında yer alan bir çubuğun;

a. Toplam kütlesini bulunuz.

b. Kütle merkezinin koordinatını bulunuz.

İki boyutlu bir cismin kütle merkezini nasıl bulacağımızı tartışalım. Kütle merkezinin konumunu matematiksel olarak ifade edelim.

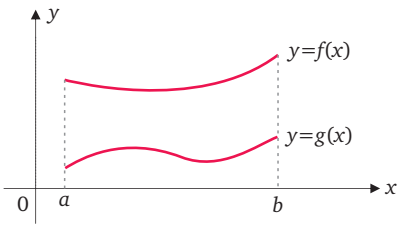
ÖRNEK 17: Koordinat düzleminde x-ekseni, $x = 2$ doğrusu ve $y = 3x$ doğrusu tarafından sınırlanan üçgensel bir levha bulunmaktadır. Bu levhanın konuma bağlı yoğunluğu $\delta(x) = x + 2$ olduğuna göre;

a. Levhanın toplam kütlesini bulunuz.

b. Levhanın kütle merkezinin x-koordinatını bulunuz.

c. Levhanın kütle merkezinin y-koordinatını bulunuz.

İki eğri arasında kalan levhaların kütle merkezini nasıl bulacağımızı tartışalım.



ÖRNEK 18: Koordinat düzleminde üstten $f(x) = \sqrt{x}$ eğrisi, alttan $g(x) = x^2$ eğrisi ile sınırlanan bir levha bulunmaktadır. Bu levhanın konuma bağlı yoğunluk fonksiyonu $\delta(x) = 6x$ olduğuna göre;

a. Levhanın toplam kütlesini bulunuz.

b. Levhanın kütle merkezinin x-koordinatını bulunuz.

c. Levhanın kütle merkezinin y-koordinatını bulunuz.

ertansinansahin.com

Merkezler

Bir şeklin merkezinin nasıl bulunacağını tartışalım.

ÖRNEK 19: Koordinat düzleminde x-ekseninin üzerinde yer alan, merkezi orijin olan $r = 4$ yarıçaplı yarım çember ile x-ekseni tarafından sınırlanan bir levha bulunmaktadır. Bu levhanın yoğunluğu δ sabitine eşittir. Bu levhanın;

a. Toplam kütlesini bulunuz.

b. Merkezinin koordinatlarını bulunuz.

ertansinansahin.com

Alıştırmalar ve Problemler

1. Birinci bölgede; soldan $x^2 + y^2 = 4$ çemberi, sağdan $x = 2$ doğrusu ve üstten $y = 2$ doğrusu ile sınırlanan bölgeyi göz önüne alınız. Bu bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini veren integrali;

a. Pul yöntemini kullanarak,

b. Silindirik kabuk yöntemini kullanarak yazınız.

2. $y = x^2 + 1$ parabolü ve $y = -x + 3$ doğrusu ile sınırlanan bölgeyi göz önüne alınız. Bu bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini veren integrali yazınız.

3. Köşeleri $(1,0)$, $(2,1)$ ve $(1,1)$ olan üçgensel bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini hesaplamak için;

a. Disk/pul yöntemini kullanarak hacmi veren integrali yazınız.

b. Silindirik kabuk yöntemini kullanarak hacmi veren integrali yazınız.

4. $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ fonksiyonunun grafiğinin $1 \leq x \leq 3$ aralığındaki uzunluğunu bulunuz.

5. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ eğrisinin $x = 0$ ile $x = \ln(3)$ aralığındaki uzunluğunu bulunuz.

ertansinansahin.com

6. r yarıçaplı ve merkezi orijinde olan bir çemberin çevresini bulmak için gerekli integrali yazınız.

7. $y = \frac{1}{3}x^3$ eğrisinin $0 \leq x \leq 1$ aralığındaki parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzey S olsun. Bu yüzeyinin alanını hesaplayınız.

8. D bölgesi; $y = e^x$, $y = \sqrt{x+1}$ eğrileri ve $y = 2$ doğrusu tarafından sınırlandırılmış bir bölge olsun.

a. D bölgesinin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan S katı cisminin hacmini, dilimleme (disk/pul) yöntemi kullanarak bir veya birden fazla integral ile ifade ediniz.

b. (a) şıkkında verilen S katı cisminin hacmini, silindirik kabuklar yöntemi kullanarak bir veya birden fazla integral ile ifade ediniz.

c. D bölgesinin $x = -2$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan katı cismin hacmini, dilimleme (disk/pul) yöntemi kullanarak bir veya birden fazla integral ile ifade ediniz.

ertansinansahin.com

9. $x^2-6x+y^2=-5$ denklemi ile verilen çemberin iç kısmında kalan bölge y-ekseni etrafında döndürülüyor. Bu dönme sonucunda oluşan cismin hacmini veren integrali silindirik kabuk yöntemi kullanarak yazınız.

10. $\mathscr{R}$ bölgesi $x=0$ ve $y=x-3$ doğruları ile $y=(x-3)^2(x+1)$ eğrisi tarafından sınırlanan bölge olsun.

a. $\mathscr{R}$ bölgesinin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan katı cismin hacmini bir belirli integral olarak ifade ediniz.

b. $\mathscr{R}$ bölgesinin $y=-3$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan katı cismin hacmini bir belirli integral olarak ifade ediniz.

ertansinansahin.com

Cevaplar

Örnek sorular

1 $V=\frac{1}{3}a^2h$

2 $V=\frac{\pi}{5}$

3 $V=\pi\int_0^4(2-\sqrt{x})^2dx$

4 $V=\pi\int_{-1}^1(1-y^2)^2\,dy$

5 $V=\pi\int_0^1\left[e^{2x}-(x+1)^2\right]dx$

6 $V=\pi\int_{-1}^1\left[(2-y^2)^2-1\right]dy$

7 $V=\int_0^1 2\pi x\sqrt{x}\,dx$

8 $V=2\pi\int_0^1(y^2-y^3)\,dy$

9 $L=\int_0^2\sqrt{1+(2x-1)^2}\,dx$

10 $L=\frac{14}{3}$

11 $S=\frac{\pi}{6}(27-5\sqrt{5})$

12 $W=6\,\text{J}$

13 $W=50\,\text{J}$

14 $W=1920\,\text{kJ}$

15 $F=50\,\text{kN}$

16 a. $M=16$ b. $\bar{x}=1.3$

17 a. $M=20$ b. $\bar{x}=1.4$ c. $\bar{y}=2.1$

18 a. $M=0.9$ b. $\bar{x}=\frac{4}{7}$ c. $\bar{y}=\frac{5}{9}$

19 a. $M=8\pi\delta$ b. $(0,\frac{16}{3\pi})$

Alıştırmalar ve problemler

1
a. $V=\pi\int_0^2 y^2\,dy$
b. $V=2\pi\int_0^2 x\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)dx$

2 $V=\pi\int_{-2}^1\left[(-x+3)^2-(x^2+1)^2\right]dx$

3
a. $V=\pi\int_0^1\left[(y+1)^2-1\right]dy$
b. $V=2\pi\int_1^2 x(2-x)dx$

4 $L = \frac{14}{3}$

5 $L = \frac{4}{3}$

6 $C = 4\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$

7 $A = \frac{\pi}{9}(2\sqrt{2}-1)$

8

a. $V = \pi\int_1^2 \left[(y^2-1)^2-(\ln y)^2\right] dy$

b. $V = 2\pi\int_0^{\ln 2} x\left(e^x-\sqrt{x+1}\right) dx$
$+2\pi\int_{\ln 2}^3 x\left(2-\sqrt{x+1}\right) dx$

c. $V = \pi\int_1^2 \left[(y^2+1)^2-(\ln y+2)^2\right] dy$

9 $V = 4\pi\int_1^5 x\sqrt{4-(x-3)^2}\,dx$

10

a. $V = 2\pi\int_0^3 x\left[(x-3)^2(x+1)-(x-3)\right] dx$

b. $V = \pi\int_0^3 \left(\left[(x-3)^2(x+1)+3\right]^2-x^2\right) dx$

ertansinansahin.com

7. ÜNİTE
İNTEGRASYON TEKNİKLERİ

video izle

Temel İntegrasyon Formüllerinin Kullanımı

Temel integrasyon formüllerini inceleyelim.

1. $\int k\,dx = kx + C$ (herhangi bir k için)
2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int e^x\,dx = e^x + C$
5. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
8. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
9. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
10. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
11. $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$
12. $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$
13. $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$
14. $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
15. $\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$
16. $\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$
17. $\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
19. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left|\frac{x}{a}\right| + C$
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (a > 0)$
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (x > a > 0)$

ÖRNEK 1: Aşağıda verilen belirsiz integralleri, uygun değişken değiştirme yöntemlerini ve temel integral formüllerini kullanarak hesaplayınız:

a. $\int \frac{e^x}{9+e^{2x}}\,dx$ b. $\int \frac{1}{\sqrt{4-25x^2}}\,dx$

ertansinansahin.com

ÖRNEK 2: Tam kareye tamamlama yöntemini kullanarak aşağıdaki integrali hesaplayınız:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$$

ÖRNEK 3: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$$

ÖRNEK 4: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int \frac{4x^2-5x+3}{2x-1}\,dx$$

ÖRNEK 5: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int \frac{dx}{(2+\sqrt{x})^2}$$

Kısmi İntegrasyon

Kısmi integrasyon formülünü elde edelim. Formülün diferansiyel formunu yazalım.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 6: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int x \sin x\,dx$$

ÖRNEK 7: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int \ln x\,dx$$

ÖRNEK 8: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int x^2 e^x \, dx$$

ÖRNEK 9: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int e^x \sin x \, dx$$

ÖRNEK 10: Aşağıdaki integrali, $\cos x$'in daha düşük bir kuvvetinin integrali cinsinden ifade eden bir formül elde ediniz:

$$\int \cos^n x \, dx$$

ertansinansahin.com

Kısmi integrasyon yöntemiyle belirli integralleri nasıl hesaplayacağımızı inceleyelim.

ÖRNEK 11: $y = xe^{-x}$ eğrisi, x-ekseni ve $x = 5$ dikey doğrusu ile sınırlanan bölgenin alanını;

a. Belirli integral yardımıyla ifade ediniz.

b. Kısmi integrasyon yöntemini kullanarak bu alanı hesaplayınız.

ertansinansahin.com

Trigonometrik İntegraller

m ve n tam sayılar olmak üzere, aşağıdaki integralin çözüm stratejilerini inceleyelim:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

ÖRNEK 12: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int \cos^3 x \sin^2 x \, dx$$

ÖRNEK 13: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int \cos^3 x \, dx$$

ÖRNEK 14: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$$

Köklü ifadeler içeren trigonometrik integrallerde kökten nasıl kurtulacağımızı inceleyelim.

ÖRNEK 15: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız.

$$\int \sqrt{1-\cos x}\, dx$$

$\tan x$ ve $\sec x$ fonksiyonlarının kuvvetlerini içeren integralleri nasıl alabileceğimizi tartışalım.

ÖRNEK 16: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız.

$$\int \tan^5 x \, dx$$

ertansinansahin.com

ÖRNEK 17: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız.

$$\int \sec^3 x\, dx$$

$\int \sin mx \sin nx\, dx$, $\int \sin mx \cos nx\, dx$ ve $\int \cos mx \cos nx\, dx$ integrallerini alırken ters dönüşüm formüllerini kullanabiliriz.

- $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$
- $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$
- $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

ÖRNEK 18: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int \sin x \cos 3x\, dx$$

ertansinansahin.com

Trigonometrik Dönüşümler

Örnekler üzerinden trigonometrik dönüşümlerin nasıl uygulanacağını inceleyelim.

ÖRNEK 19: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx$$

ÖRNEK 20: Aşağıdaki belirsiz integrali $a > 0$ için hesaplayınız:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

ÖRNEK 21: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}\,dx$$

Rasyonel Fonksiyonların Kısmi Kesirlere Ayırarak İntegrasyonu

Örnekler üzerinden kısmi kesirlere ayırma yönteminin nasıl uygulanacağını inceleyelim.

ÖRNEK 22: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int \frac{7x+1}{(x-2)(x+3)}dx$$

ertansinansahin.com

ÖRNEK 23: Aşağıdaki belirsiz integrali hesaplayınız:

$$\int \frac{3x-5}{(x^2+1)(x+1)^2}dx$$

Has Olmayan İntegraller

Sınırları sonsuz olan integrallerin nasıl sonlu sonuçlar verebileceğini bir örnek üzerinden tartışalım.

ÖRNEK 24: $y = \frac{1}{x^2}$ eğrisi altında, $x = 1$ doğrusundan başlayarak sağa doğru sonsuza uzanan $(x \geq 1)$ bölgeyi düşünün. Bu bölgenin sınırlı bir alana sahip olup olmadığını belirlemek için;

a. Bölgenin $x = 1$ ile $x = b$ $(b > 1)$ arasındaki kısmının alanını veren $A(b)$ fonksiyonunu bulunuz.

b. $b \to \infty$ iken bu alanın limitini hesaplayarak toplam alanı bulunuz.

1. tip has olmayan integralleri tanımlayalım. Bu integrallerin **yakınsak** ya da **ıraksak** olmasının ne anlama geldiğini tartışalım.

ÖRNEK 25: $f(x) = xe^{-x}$ fonksiyonunun $x = 1$ ile $x = \infty$ aralığında altında kalan alan sonlu mudur? Eğer öyleyse, bu alanın değerini bulunuz.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$$

integralinin hangi p değerleri için yakınsak ya da ıraksak olduğunu bulalım.

İntegrallerde bir integrandın düşey asimptotunun olmasının nasıl has olmayan integralleri ortaya çıkabileceğini tartışalım. Aşağıdaki integrali inceleyelim:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

2. tip has olmayan integralleri tanımlayalım. Bu integrallerin yakınsak ya da ıraksak olmasının ne anlama geldiğini tartışalım.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 26: Aşağıda verilen has olmayan integralin yakınsaklık durumunu inceleyiniz:

$$\int_0^2 \frac{1}{2-x}\,dx$$

ÖRNEK 27: Aşağıdaki has olmayan integralin yakınsaklık durumunu inceleyiniz:

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$$

Yakınsaklık ve ıraksaklık testleri

Doğrudan karşılaştırma testini açıklayalım.

TEOREM: f ve g fonksiyonları $[a, \infty)$ aralığında sürekli ve her $x \geq a$ için $0 \leq f(x) \leq g(x)$ olsun. Bu durumda:

a. $\int_a^\infty g(x)\,dx$ yakınsaksa, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ de yakınsaktır.
b. $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ıraksaksa, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ de ıraksaktır.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 28: Aşağıda verilen has olmayan integrallerin yakınsaklık durumlarını doğrudan karşılaştırma testini kullanarak belirleyelim.

a. $\int_1^\infty \frac{1}{x^3+1}\,dx$
b. $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$
c. $\int_3^\infty \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$
d. $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$

Limit karşılaştırma testini açıklayalım.

TEOREM: f ve g pozitif fonksiyonları $[a, \infty)$ aralığında sürekli olsunlar. Eğer,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad 0 < L < \infty$$

koşulu sağlanıyorsa;

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{ve} \quad \int_a^\infty g(x)\,dx$$

integrallerinin her ikisi birden ya yakınsaktır ya da her ikisi birden ıraksaktır.

ÖRNEK 29: Aşağıda verilen has olmayan integrallerin yakınsaklık durumlarını limit karşılaştırma testini kullanarak belirleyelim.

a. $\int_2^\infty \frac{1}{x^2-1}\,dx$ b. $\int_1^\infty \frac{x+2}{2x^2+1}\,dx$

Alıştırmalar ve Problemler

1. Aşağıda verilen belirsiz integralleri hesaplayınız.

a. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ c. $\int \frac{e^{-\tan x}}{\cos^2 x}dx$

b. $\int (\sec x + \tan x)^2 dx$ d. $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^{-2x}}$

2. Aşağıda verilen integralleri kısmi integrasyon yöntemini kullanarak hesaplayınız.

a. $\int x^2 \ln(x)\,dx$ c. $\int e^{3x}\cos x\,dx$

b. $\int (2x-3)\sin 2x\,dx$ d. $\int x^2 e^{-x}\,dx$

ertansinansahin.com

3. n pozitif bir tam sayı olmak üzere, aşağıdaki eşitliğin sağlandığını kısmi integrasyon yöntemini kullanarak gösteriniz:

$$\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$$

4. f sürekli bir fonksiyon olmak üzere, aşağıdaki eşitliğin sağlandığını kısmi integrasyon yöntemini kullanarak gösteriniz:

$$\int_a^b \left(\int_x^b f(t)\,dt\right) dx = \int_a^b (x-a)f(x)\,dx$$

ertansinansahin.com

5. Aşağıda verilen trigonometrik integralleri hesaplayınız.

a. $\int \sin^5 x\,dx$

b. $\int \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}dx$

c. $\int \tan^4 x \sec^4 x\,dx$

d. $\int x \sin^3 x\,dx$

6. Aşağıda verilen integralleri trigonometrik dönüşümleri kullanarak hesaplayınız.

a. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

b. $\int \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\,dx$

c. $\int \frac{dx}{(9-x^2)^{3/2}}$

d. $\int \frac{2dx}{(4x^2+1)^2}$

7. Aşağıda verilen integralleri kısmi kesirlere ayırma yöntemini kullanarak hesaplayınız.

a. $\int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx$

b. $\int \frac{x+7}{x^2+2x-8}\,dx$

c. $\int \frac{x^4}{x^2-4}\,dx$

ertansinansahin.com

8. Aşağıdaki has olmayan integrallerin her birinin, doğrudan karşılaştırma testi kullanarak yakınsak mı yoksa ıraksak mı olduğunu belirleyiniz.

a. $\int_1^\infty \frac{2+\sin\left(x^2\right)}{\sqrt{x^5+4x}}\,dx$

b. $\int_1^\infty \frac{e^{1/x}}{x+\ln^2 x}\,dx$

c. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\ln(1+x)}\,dx$

d. $\int_0^1 \frac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}}\,dx$

9. Aşağıdaki integralin yakınsak olmasını sağlayan p değerlerini bulunuz ve bu değerler için integrali hesaplayınız.

$$\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$$

ertansinansahin.com

10. Aşağıdaki has olmayan integralin yakınsaklık veya ıraksaklık durumunu limit karşılaştırma testini kullanarak belirleyiniz:

$$\int_2^\infty \frac{\ln(x)+\sqrt{x}}{x^2-\ln(x)}\,dx$$

Cevaplar

Örnek sorular

1 a. $\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{e^x}{3}\right)+C$ b. $\frac{1}{5}\arcsin\left(\frac{5x}{2}\right)+C$

2 $\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$

3 $\csc x-\cot x+C$

4 $x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}\ln|2x-1|+C$

5 $2\ln\left(2+\sqrt{x}\right)+\frac{4}{2+\sqrt{x}}+C$

6 $-x\cos x+\sin x+C$

7 $x\ln x-x+C$

8 $(x^2-2x+2)e^x+C$

9 $\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C$

10 $\int\cos^n x\,dx=\frac{\cos^{n-1}x\sin x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx$

11 a. $A=\int_0^5 xe^{-x}\,dx$ b. $A=1-6e^{-5}$

12 $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$

13 $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$

14 $\frac{x}{16}-\frac{\sin(4x)}{64}-\frac{\sin^3(2x)}{48}+C$

15 $-2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)+C$

16 $\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\sec x|+C$

17 $\frac{1}{2}(\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|)+C$

18 $-\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$

19 $\arctan x+C$

20 $\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$

21 $-\frac{\sqrt{16-x^2}}{x}-\arcsin\left(\frac{x}{4}\right)+C$

22 $3\ln|x-2|+4\ln|x+3|+C$

23 $\frac{5}{4}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{3}{2}\arctan(x)-\frac{5}{2}\ln|x+1|+\frac{4}{x+1}+C$

24 a. $A(b)=1-\frac{1}{b}$ b. Alan $=1$

25 Sonludur, Alan $=\frac{2}{e}$

26 İntegral ıraksaktır.

27 İntegral yakınsaktır, $I=4$

28 a. Yakınsak b. Yakınsak
c. Iraksak d. Yakınsak

29 a. Yakınsak b. Iraksak

Alıştırmalar ve problemler

1
a. $\frac{1}{2}\arcsin(2x)+C$
b. $2\tan x+2\sec x-x+C$
c. $-e^{-\tan x}+C$
d. $\frac{1}{2}\arctan\left(e^{2x}\right)+C$

2
a. $\frac{x^3}{3}\ln(x)-\frac{x^3}{9}+C$
b. $-\frac{2x-3}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+C$
c. $\frac{e^{3x}}{10}(\sin x+3\cos x)+C$
d. $-e^{-x}(x^2+2x+2)+C$

3 Videoya gidiniz.

4 Videoya gidiniz.

5
a. $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$
b. $-\frac{4\sqrt{2}}{3}\cos^3\left(\frac{x}{2}\right)+C$
c. $\frac{1}{5}\tan^5 x+\frac{1}{7}\tan^7 x+C$
d. $-x\cos x+\frac{x\cos^3 x}{3}+\frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{9}\sin^3 x+C$

6
a. $\operatorname{arcsec}(x)+C$
b. $\arcsin(x)-\sqrt{1-x^2}+C$
c. $\frac{x}{9\sqrt{9-x^2}}+C$
d. $\frac{1}{2}\arctan(2x)+\frac{x}{4x^2+1}+C$

7
a. $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$
b. $-\frac{1}{2}\ln|x+4|+\frac{3}{2}\ln|x-2|+C$
c. $\frac{x^3}{3}+4x+4\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$

8
a. Yakınsak b. Iraksak
c. Iraksak d. Iraksak

9 $p>1$ için yakınsar. İntegral değeri: $\frac{1}{p-1}$

10 İntegral yakınsaktır, videoya gidiniz.

ertansinansahin.com

8. ÜNİTE

SONSUZ DİZİLER VE SERİLER - 1

video izle

Motivasyon

Bu ünitede temel amacımız:

- Karmaşık fonksiyonları, sonsuz toplamlar (seriler) yardımıyla nasıl temsil edebileceğimizi öğrenmek.
- Bir yaklaşımın (tahminin) gerçek değere ne kadar yakın olduğunu "hata tahmini" ile ölçmek.
- Diferansiyel denklemleri ve integral hesaplarını, serileri kullanarak çok daha kolay çözülebilir hale getirmek.

Aşağıdaki örnekleri inceleyelim:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Diziler

Dizi kavramının ne olduğunu ifade edelim.

Aşağıdaki dizi örneklerini inceleyelim.

- $a_n = 3n + 1$
- $b_n = (-1)^n \cdot n^2$

ÖRNEK 1: Aşağıda ilk birkaç terimi verilen dizinin genel terimi a_n için bir formül bulunuz (örüntünün aynı şekilde devam ettiğini varsayınız):

$$\left\{\frac{5}{3}, -\frac{7}{9}, \frac{9}{27}, -\frac{11}{81}, \frac{13}{243}, \cdots\right\}$$

Yakınsaklık ve ıraksaklık

TANIM: Her $\epsilon > 0$ sayısı için $n > N$ olduğunda $|a_n - L| < \epsilon$ kalacak şekilde bir N tam sayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi L sayısına yakınsar denir.

Bu durum $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ veya $a_n \to L$ şeklinde gösterilir ve L sayısına dizinin limiti denir. Böyle bir L sayısının bulunmadığı durumlarda $\{a_n\}$ dizisi ıraksar.

$a_n = \frac{1}{n}$ genel terimi ile verilen $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ dizisinin yakınsak olduğunu gösterelim.

$a_n = (-1)^{n+1}$ genel terimi ile verilen $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\}$ dizisinin ıraksak olduğunu gösterelim.

Bir dizi için sonsuza ya da negatif sonsuza ıraksamayı tanımlayalım.

ertansinansahin.com

Dizilerin limitlerinin hesaplanması

Dizilerin limitlerini hesaplarken limit konusunda kullandığımız yöntemlerden nasıl faydalandığımızı inceleyelim.

$\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ reel sayı dizileri olsun. A ve B reel sayılar olmak üzere; eğer $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ve $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ ise aşağıdaki kurallar geçerlidir:

Toplam Kuralı: $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$

Fark Kuralı: $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$

Sabit Çarpan Kuralı: $\lim_{n\to\infty}(k \cdot b_n) = k \cdot B,$ (herhangi bir k sayısı için)

Çarpım Kuralı: $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$

Bölüm Kuralı: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B},\ B \neq 0$ için

NOT: Limit hesabında kullandığımız birçok yöntemi burada kullanabiliriz.

TEOREM: Eğer $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ise, bu durumda her n tam sayısı için tanımlanan $a_n = f(n)$ dizisinin limiti de $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ olur.

ÖRNEK 2: Aşağıda verilen limitleri hesaplayınız.

a. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n} - 2\right)$

b. $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^4-2}{3n^4+n^2}$

c. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$

d. $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$

L'Hôpital kuralını kullanarak aşağıdaki limiti hesaplayalım. Bu kuralın kullanılma koşulunu tartışalım.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$$

Yinelemeli tanımlar

Bir örnek üzerinden yinelemeli tanımları inceleyelim.

ÖRNEK 3: $f_1 = 1$ ve $f_2 = 1$ olmak üzere, her $n \geq 3$ için $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ şeklinde tanımlanan Fibonacci dizisi $\{f_n\}$ veriliyor. Buna göre dizinin ilk 6 terimini yazınız.

ertansinansahin.com

Sınırlı monoton diziler

Bir dizinin sınırsız ya da üstten veya alttan sınırlı olmasının ne anlama geldiğini örnekler üzerinden inceleyelim.

- $a_n = n^2$
- $b_n = \frac{n+1}{n}$

Bir dizinin monoton olup olmamasının ya da azalmayan veya artmayan olmasının ne olduğunu tanımlayalım. Aşağıdaki örnekleri bu açıdan değerlendirelim.

- $\{n^3\} = 1, 8, 27, \ldots, n^3, \ldots$
- $\{\frac{n+1}{n}\} = 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots$
- $\{\frac{1}{3^n}\} = \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots, \frac{1}{3^n}, \ldots$
- $\{5\} = 5, 5, 5, \ldots, 5, \ldots$
- $\{(-2)^n\} = -2, 4, -8, 16, \ldots$

TEOREM: Bir $\{a_n\}$ dizisi hem sınırlı hem de monoton ise bu dizi yakınsaktır.

Sonsuz Seriler

Sonsuz seri kavramını açıklayalım. Bir sonsuz seri örneğini kısmi toplamlar üzerinden inceleyelim.

Bir seri için yakınsaklığı ve ıraksaklığı tanımlayalım.

Geometrik seriler

Geometrik serilerin formunu inceleyelim. Bu forma uygun bir örnek yazalım. Böyle bir serinin yakınsaklık koşulunu tartışalım. Yakınsaklık durumu için serinin yakınsadığı değeri elde edelim.

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

ertansinansahin.com

ÖRNEK 4: Aşağıda genel terimleri verilen sonsuz serilerin toplamlarını bulunuz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ b. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{4^n}$

ÖRNEK 5: Yerden h kadar yükseklikten serbest bırakılan bir top, her yere çarptığında bir önceki düşüş yüksekliğinin k katı kadar yükseğe geri sıçramaktadır $(0 < k < 1)$. Topun aldığı toplam yolu h ve k cinsinden bulunuz.

ÖRNEK 6: 2.3575757... devirli ondalık sayısını, sonsuz bir geometrik serinin toplamı olarak ifade ederek iki tam sayının oranı şeklinde yazınız.

ÖRNEK 7: Aşağıda verilen "teleskopik" serinin toplamını bulunuz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$$

Iraksaklık testi

Aşağıdaki serinin neden ıraksak olduğunu inceleyelim.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n}{n+1} + \cdots$$

TEOREM: Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak ise $a_n \to 0$ olur.

ÖRNEK 8: Aşağıda verilen sonsuz serilerin yakınsaklık veya ıraksaklık durumunu belirleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2n+3}$

ertansinansahin.com

Serilerin birleştirilmesi

Elimizde iki yakınsak seri olduğunda, bunları terim terim toplayabilir, terim terim çıkarabilir veya sabitlerle çarparak yeni yakınsak seriler elde edebiliriz.

TEOREM: Eğer $\sum a_n = A$ ve $\sum b_n = B$ yakınsak seriler ise, bu durumda aşağıdaki kurallar geçerlidir:

Toplam Kuralı: $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n = A + B$

Fark Kuralı: $\sum (a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n = A - B$

Sabit Kat Kuralı: $\sum k a_n = k \sum a_n = kA$ $(k \in \mathbb{R})$.

Bu teoremi ıraksak seriler için tartışabiliriz.

ÖRNEK 9: Aşağıdaki serinin toplamını bulunuz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}+3}{5^{n-1}}$$

Terim ekleme ya da çıkarma ve indis değiştirme

Terim ekleme ya da çıkarma ve indis değiştirme işlemlerini nasıl yaptığımızı inceleyelim.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 10: Aşağıda verilen sonsuz serilerin yakınsaklık durumunu inceleyiniz ve eğer yakınsak ise serinin toplamını bulunuz.

a. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ b. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$

İntegral Testi

Aşağıdaki teoremi harmonik serinin ıraksaklığını göstermek için kullanalım.

TEOREM: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ negatif olmayan terimlerden oluşan bir seri olsun. Bu seri ancak ve ancak kısmi toplamları üstten sınırlı ise yakınsaktır.

ÖRNEK 11: Aşağıda verilen serinin yakınsaklık durumunu inceleyelim:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

TEOREM: $\{a_n\}$ pozitif terimli bir dizi olsun. Tüm $x \geq N$ ($N \in \mathbb{Z}^+$) değerleri için f fonksiyonunun; sürekli, pozitif ve azalan bir fonksiyon olduğunu ve $a_n = f(n)$ sağladığını varsayalım. Bu durumda, $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ serisi ile $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ integrali ya aynı anda yakınsar ya da aynı anda ıraksar.

p-serisinin yakınsaklık ve ıraksaklık koşulunu inceleyelim:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

ÖRNEK 12: Aşağıda verilen sonsuz serilerin yakınsaklık veya ıraksaklık durumunu belirleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ b. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2(n)}$

ertansinansahin.com

İntegral testi ile hata tahmini

Pozitif terimli bir $\sum a_n$ serisinin integral testi ile yakınsak olduğunun gösterildiğini varsayalım. Bu durumda, serinin toplam değeri S ile n. kısmi toplamı s_n arasındaki farkı ölçen R_n kalan teriminin büyüklüğünü tahmin edelim.

ÖRNEK 13: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisinin toplamı, $n = 4$ alınarak integral testi ile hata tahmini yöntemiyle kestirilecektir. Serinin toplamı S için alt ve üst sınırları belirleyiniz. (Elde ettiğiniz sonucu $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.64493$ değeri ile kıyaslayınız.)

Karşılaştırma Testleri

Doğrudan karşılaştırma testi

TEOREM: $\sum a_n$ ve $\sum b_n$, her n için $0 \le a_n \le b_n$ şartını sağlayan iki seri olsun. Bu durumda:

I. Eğer $\sum b_n$ yakınsaksa $\sum a_n$ de yakınsaktır.

II. Eğer $\sum a_n$ ıraksaksa $\sum b_n$ de ıraksaktır.

ÖRNEK 14: Aşağıda verilen sonsuz serilerin yakınsaklık durumunu doğrudan karşılaştırma testi ile inceleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+\sqrt{n}}$

Limit karşılaştırma testi

TEOREM: Her $n \geq N$ $(N \in \mathbb{Z})$ için $a_n > 0$ ve $b_n > 0$ olsun.

I. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ ve $c > 0$ ise $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ ya beraber yakınsar ya da beraber ıraksar.

II. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ve $\sum b_n$ yakınsar ise $\sum a_n$ yakınsar.

III. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ ve $\sum b_n$ ıraksar ise $\sum a_n$ ıraksar.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 15: Aşağıda verilen sonsuz serilerin yakınsaklık durumunu limit karşılaştırma testi ile inceleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5n}{n^4+2n-1}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\ln(n)}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$

Mutlak Yakınsaklık; Oran ve Kök Testleri

TANIM: Eğer $\sum |a_n|$ serisi yakınsaksa $\sum a_n$ serisi mutlak yakınsaktır.

TEOREM: Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serisi yakınsaksa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de yakınsaktır.

ÖRNEK 16: Aşağıda verilen serilerin mutlak yakınsak olup olmadıklarını belirleyiniz ve yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

ÖRNEK 17: Aşağıda verilen serilerin yakınsaklık durumlarını oran testini kullanarak inceleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$

ertansinansahin.com

Oran testi

TEOREM: $\sum a_n$ herhangi bir seri olsun ve varsayalım ki:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$$

Bu durumda;

I. Eğer $\rho < 1$ ise seri mutlak yakınsaktır.

II. Eğer $\rho > 1$ veya ρ sonsuzsa seri ıraksaktır.

III. Eğer $\rho = 1$ ise, test sonuçsuzdur.

Kök testi

TEOREM: $\sum a_n$ herhangi bir seri olsun ve varsayalım ki

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

olsun. Bu durumda;

I. Eğer $\rho < 1$ ise seri mutlak yakınsaktır.

II. Eğer $\rho > 1$ veya ρ sonsuz ise seri ıraksaktır.

III. Eğer $\rho = 1$ ise test sonuçsuzdur.

ÖRNEK 18: Aşağıda verilen serilerin yakınsaklık durumlarını kök testini kullanarak inceleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{4n-2}\right)^n$ b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}$

Almaşık Seriler ve Koşullu Yakınsaklık

TEOREM:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$$

şeklindeki bir seri, aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa yakınsaktır:

I. Tüm u_n değerleri pozitif olmalıdır.

II. u_n dizisi, yeterince büyük her $n \geq N$ tam sayısı için $u_n \geq u_{n+1}$ koşulunu sağlamalı, yani monoton azalan bir karakter sergilemelidir.

III. $u_n \to 0$ olmalıdır.

ÖRNEK 19: Aşağıda verilen sonsuz serinin yakınsaklığını inceleyiniz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Harmonik serinin bir varyasyonu olan aşağıdaki

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

sonsuz seri için *almaşık seri tahmin teoremini* inceleyelim.

Koşullu yakınsaklık

TANIM: Yakınsak olan fakat mutlak yakınsak olmayan bir seriye koşullu yakınsak seri denir.

Aşağıdaki seriyi koşullu yakınsaklık durumu için inceleyelim:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

ÖRNEK 20: Aşağıda verilen serilerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\arctan n}{n^2+1}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+5}$

ertansinansahin.com

Alıştırmalar ve Problemler

1. Aşağıda genel terimi verilen dizilerin yakınsaklık durumunu inceleyiniz. Eğer yakınsak ise limitini bulunuz.

a. $a_n = \frac{3n^2-5n+1}{2n^2+7}$

b. $a_n = \left(1+\frac{5}{n}\right)^n$

c. $a_n = \frac{\ln\left(n^2\right)}{n}$

d. $a_n = \frac{(-1)^n \sin(n)}{n^2+1}$

e. $a_n = \frac{n!}{n^n}$

f. $a_n = \frac{n^2+\ln n}{3n+2}$

2. Aşağıda genel terimi verilen dizilerin monotonluğunu ve sınırlılığını belirleyiniz.

a. $a_n = \frac{4n-3}{2n+5}$

b. $a_n = \frac{(3n+1)!}{(n+2)!}$

ertansinansahin.com

3. Aşağıda verilen sonsuz serilerin yakınsaklık durumunu inceleyiniz ve eğer yakınsak ise serinin toplamını bulunuz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^{n+1}}{5^n}\right)$

b. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{3}{2^n}\right)$

c. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{2^n}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n(n+1)}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{1/n}}-\frac{1}{2^{1/(n+1)}}\right)$

f. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{1}{2^n}$

4. Aşağıda verilen sonsuz seriler için ıraksaklık testini uygulayıp elde edilen sonucu ifade ediniz.

a. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{e^n+n^2}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{n^3}$

5. Aşağıdaki geometrik serilerin her biri için serinin yakınsadığı x değerlerini bulunuz. Ayrıca, bu x değerleri için serinin toplamını x'in bir fonksiyonu olarak ifade ediniz.

a. $\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^n$

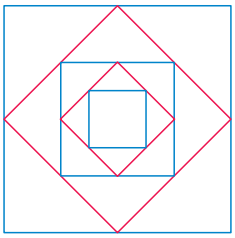
b. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+2}{2}\right)^n$

c. $\sum_{n=0}^{\infty}\cos^n x$

d. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\ln x}{2}\right)^n$

ertansinansahin.com

6. Bir kenar uzunluğu a olan bir kare ile başlanarak, her yeni kare bir önceki karenin kenar orta noktaları birleştirilerek oluşturulmaktadır. Bu işlem sonsuz kez tekrarlandığında oluşan tüm karelerin çevrelerinin toplamını a cinsinden bulunuz.



7. Aşağıda verilen sonsuz serilerin yakınsaklık veya ıraksaklık durumunu integral testi kullanarak belirleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$

b. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

8. Aşağıda verilen serilerin yakınsaklık durumlarını karşılaştırma testlerini kullanarak belirleyiniz:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+n}$

b. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+5}{n^2-n}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}e^n}$

d. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$

9. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz. (İpucu: İlk olarak $n \geq 2$ için $1/n! \leq 1/n(n-1)$ olduğunu gösteriniz.)

ertansinansahin.com

10. Aşağıda verilen serilerin yakınsaklık durumlarını oran ya da kök testini kullanarak inceleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^n(n!)^2}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Cevaplar

Örnek sorular

1	$a_n = (-1)^{n+1}\frac{2n+3}{3^n}$
2	a. -2 b. $\frac{5}{3}$ c. 0 d. 0
3	{1,1,2,3,5,8}
4	a. 6 b. $\frac{12}{5}$
5	$S = h\left(\frac{1+k}{1-k}\right)$
6	$\frac{389}{165}$
7	$\frac{1}{2}$
8	a. Iraksak b. Iraksak
9	$\frac{125}{12}$
10	a. Yakınsak, $\frac{1}{12}$ b. Yakınsak, $\frac{8}{3}$
11	Yakınsak
12	a. Yakınsak b. Yakınsak
13	$1.62361 \le S \le 1.67361$
14	a. Iraksak b. Yakınsak
15	a. Yakınsak b. Yakınsak c. Iraksak
16	a. Seri mutlak yakınsaktır; dolayısıyla yakınsaktır. b. Seri mutlak yakınsaktır; dolayısıyla yakınsaktır.
17	a. Yakınsak b. Iraksak c. Oran testi sonuç vermez ($L = 1$)
18	a. Yakınsak b. Yakınsak
19	Yakınsak
20	a. Koşullu yakınsak b. Iraksak c. Mutlak yakınsak

Alıştırmalar ve problemler

1	a. Yakınsak, $L = \frac{3}{2}$ b. Yakınsak, $L = e^5$ c. Yakınsak, $L = 0$ d. Yakınsak, $L = 0$ e. Yakınsak, $L = 0$ f. Iraksak, $+\infty$
2	a. Monoton azalmayan ve sınırlıdır. Alt sınır $\frac{1}{7}$, üst sınır 2. b. Monoton azalmayan, alttan sınır 4, üstten sınırsız.
3	a. Yakınsak, $\frac{7}{6}$ b. Iraksak c. Yakınsak, $\frac{2}{3}$ d. Yakınsak, 5 e. Yakınsak, $-\frac{1}{2}$ f. Iraksak
4	a. Iraksak b. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, test sonuçsuz
5	a. $x \in (-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $S(x) = \frac{1}{1-3x}$ b. $x \in (-4,0)$, $S(x) = -\frac{2}{x}$ c. $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, $S(x) = \frac{1}{1-\cos x}$ d. $x \in (e^{-2},e^2)$, $S(x) = \frac{2}{2-\ln x}$
6	$L = 4a(2+\sqrt{2})$
7	a. Iraksak b. Iraksak
8	a. Yakınsak b. Iraksak c. Yakınsak d. Iraksak
9	Yakınsak
10	a. Iraksak b. Yakınsak

ertansinansahin.com

8. ÜNİTE

SONSUZ DİZİLER VE SERİLER - 2

video izle

Kuvvet Serileri

TANIM: $x = 0$ merkezli bir kuvvet serisi, aşağıdaki formda bir seridir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

$x = a$ merkezli bir kuvvet serisi, aşağıdaki formda bir seridir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots$$

Burada a merkez ve $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ katsayıları birer sabittir.

Aşağıdaki geometrik kuvvet serisini inceleyelim ve serinin yakınsak olduğu aralığı elde edelim. Bu aralık için serinin yakınsadığı fonksiyonu bulalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

Aşağıdaki geometrik kuvvet serisini inceleyelim ve serinin yakınsak olduğu aralığı elde edelim. Bu aralık için serinin yakınsadığı fonksiyonu bulalım.

$$1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-1)^n + \cdots$$

ertansinansahin.com

ÖRNEK 1: Aşağıda verilen kuvvet serilerinin hangi x değerleri için yakınsadığını belirleyiniz.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$

b. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

c. $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = 1 + x + 2! x^2 + 3! x^3 + \cdots$

TEOREM: Bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık karakteri, serinin belirli noktalardaki davranışı üzerinden şu şekilde tanımlanır:

I. **Yakınsaklık:** Eğer seri $x = c$ $(c \neq 0)$ değerinde yakınsak ise; merkeze c noktasından daha yakın olan tüm x değerleri için, yani her $|x| < |c|$ için, seri mutlak yakınsaktır.

II. **Iraksaklık:** Eğer seri $x = d$ değerinde ıraksak ise; merkezden d noktasına göre daha uzak olan tüm x değerleri için, yani her $|x| > |d|$ için, seri ıraksaktır.

NOT: Bu teorem bize kuvvet serilerinin her zaman merkeze göre simetrik bir yakınsaklık aralığına sahip olduğunu söyler.

$\sum a_n(x-a)^n$ kuvvet serisi üzerinden *yakınsaklık yarıçapı* kavramını tartışalım.

Kuvvet serileri üzerinde işlemler

Kuvvet serileri için *seri çarpma* işlemini aşağıdaki örnek üzerinden inceleyelim:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$$

Bir kuvvet serisinde x değişkeninin yerine bir $f(x)$ fonksiyonu yazılabilir.

Aşağıdaki seri üzerinde bunu $f(x) = 4x^2$ için sonuçlarıyla birlikte inceleyelim:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Bir kuvvet serisi terim terim türevlenebilir.

Aşağıdaki seri üzerinde bunu inceleyelim:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

ertansinansahin.com

Bir kuvvet serisi terim terim integre edilebilir.

Aşağıdaki seri üzerinde bunu inceleyelim:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

ÖRNEK 2: Aşağıdaki kuvvet serisi ile tanımlanan $f(x)$ fonksiyonunu belirleyiniz:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \quad -1 \le x \le 1.$$

ÖRNEK 3: Aşağıdaki seri $\sin x$ fonksiyonu için verilmiştir ve tüm x değerleri için $\sin x$ değerine yakınsar:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

a. $\cos x$ serisinin ilk terimlerini bulunuz. Seri hangi x değerleri için yakınsar?

b. $\sin x$ serisinde x yerine $2x$ yazarak tüm x değerleri için $\sin 2x$'e yakınsayan bir seri bulunuz.

c. Seri çarpımını kullanarak $2 \sin x \cos x$ serisinin ilk terimlerini hesaplayınız. Cevabınızı (b) şıkkındaki cevapla karşılaştırınız.

ertansinansahin.com

Taylor ve Maclaurin Serileri

Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ civarında pozitif bir yakınsaklık yarıçapına sahip bir kuvvet serisinin toplamı olduğunu varsayalım. Yani fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots$$

şeklinde yazalım. Şimdi buradaki katsayıları fonksiyonun türevleri üzerinden elde edelim. Bu katsayıları kullanarak Taylor ve Maclaurin serilerini tanımlayalım.

ÖRNEK 4: $f(x) = \ln x$ fonksiyonunun $a = 1$ noktası civarındaki Taylor serisini bulunuz ve bu serinin yakınsama yarıçapını belirleyiniz.

f fonksiyonunun $x = a$ noktasında her mertebeden türevi mevcut olsun. Bu durumda f fonksiyonunu a noktası civarında temsil eden n. dereceden Taylor Polinomu $P_n(x)$ şu şekilde tanımlanır:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$f(x) = e^x$ fonksiyonu için $x = 0$ noktasında üretilen Taylor serisini bulalım. Ardından, bu serinin ilk üç terimini kullanarak $P_0(x)$, $P_1(x)$ ve $P_2(x)$ Taylor polinomlarını yazalım.

ÖRNEK 5: $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun Maclaurin serisi açılımını bulunuz.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 6: $f(x) = x^3 - 5x + 1$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki Taylor açılımını bulunuz.

Hata tahmini

Örnekler üzerinden Taylor serileri için hata tahminlerini inceleyelim.

ÖRNEK 7: $x = 0.2$ değerinde $\cos x$ değerini tahmin etmek için $P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ polinomu kullanıldığında oluşacak hatayı tahmin ediniz.

ÖRNEK 8: $1/e$ değerini, hata payı $1/100$ değerinden daha küçük olacak şekilde yaklaşık olarak hesaplayınız.

ertansinansahin.com

TEOREM: Eğer f fonksiyonu ve onun ilk n türevi olan $f', f'', \cdots, f^{(n)}$, a ve b arasındaki kapalı aralıkta sürekli; $f^{(n)}$ ise a ve b arasındaki açık aralıkta türetilebilir ise, bu durumda a ve b arasında aşağıdaki eşitliği sağlayan bir c sayısı vardır:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

$\cos x$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki Taylor serisinin her x değeri için $\cos x$ fonksiyonuna yakınsadığını gösterelim.

ÖRNEK 9: x değerleri küçük olduğunda $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$ yaklaşımı kullanılır. $|x| < 0.1$ olduğunda bu yaklaşımın hatasını tahmin ediniz.

Taylor Serilerinin Uygulamaları

Binom serisi

$(1+x)^m$ ifadesinin $|x|<1$ için sonsuz seri açılımı şu şekildedir:

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

ÖRNEK 10: $f(x) = \sqrt{1+x}$ fonksiyonu veriliyor.

a. Bu fonksiyonun $x=0$ merkezli Binom serisi açılımının ilk üç terimini yazınız.

b. Benzer şekilde, $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ fonksiyonunun $x=0$ merkezli Binom serisi açılımının ilk üç terimini yazınız.

ertansinansahin.com

Temel olmayan integrallerin hesaplanması

Bir örnek üzerinden Taylor serilerinin integral hesabında nasıl kullandığını inceleyelim.

ÖRNEK 11: $\cos x^3$ fonksiyonunun Maclaurin serisini kullanarak aşağıdaki maddeleri cevaplayınız:

a. $\int \cos x^3\, dx$ belirsiz integralini bir kuvvet serisi olarak ifade ediniz.

b. $\int_0^1 \cos x^3\, dx$ belirli integralinin değerini, hata payı 10^{-2}'ten küçük olacak şekilde tahmin ediniz.

Arktanjantlar

Bir örnek üzerinden Taylor serilerinin arktanjant hesaplarında nasıl kullanıldığını inceleyelim.

ÖRNEK 12: $f(x) = \arctan x$ fonksiyonunun $x=0$ civarındaki Taylor serisini kullanarak, $\frac{\pi}{4}$ değerini 10^{-2} hata payından daha küçük bir hata ile hesaplamak istediğimizi düşünelim.

a. $\arctan x$ fonksiyonunun Taylor serisi açılımını yazınız.

b. $\frac{\pi}{4}$ değerini istenen hassasiyette hesaplamak için serinin kaç teriminin toplanması gerektiğini belirleyiniz.

Belirsiz formların hesaplanması

Bazen belirsiz formları, ilgili fonksiyonları Taylor serisi cinsinden ifade ederek hesaplayabiliriz. Örnekleri inceleyelim.

ÖRNEK 13: Aşağıdaki limiti Taylor serisini kullanarak hesaplayınız:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$

ÖRNEK 14: Aşağıdaki limiti Taylor serisini kullanarak hesaplayınız:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

Euler'in özdeşliği

Euler'in özdeşliğini yazalım ve bu özdeşliği Taylor serileri üzerinden gösterelim.

Önemli Maclaurin serileri ve yakınsaklık yarıçapları:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots,\quad R=1$$

$$\tan^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots,\quad R=1$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots,\quad R=1$$

$$(1+x)^k=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n=1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\cdots,\quad R=1$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots,\quad R=\infty$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots,\quad R=\infty$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots,\quad R=\infty$$

ertansinansahin.com

Alıştırmalar ve Problemler

1. Aşağıda verilen kuvvet serileri için;

i. Yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

ii. Hangi x değerleri için seri mutlak yakınsaktır?

iii. Hangi x değerleri için seri koşullu yakınsaktır?

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 4^n}$

b. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x+1)^n}{\sqrt{n+1}}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 5^n}$

2. Aşağıda verilen serinin yakınsaklık aralığını bulunuz ve bu aralık dahilinde serinin toplamını x'in bir fonksiyonu olarak ifade ediniz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (e^x - 1)^n$$

3. Aşağıda verilen serinin toplamını bulunuz:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n} + \cdots$$

ertansinansahin.com

4. Aşağıdaki fonksiyonların $x = 0$ noktasındaki Taylor serilerini (Maclaurin serileri) bulunuz:

a. $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$ b. $g(x) = e^{-x^2}$

5. $f(x) = \frac{3x^2}{3-x}$ fonksiyonu verilsin.

a. $f(x)$ fonksiyonunun Maclaurin serisini (0 civarındaki Taylor serisi) bulunuz.

b. Bu serinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

6. $G(x) = \int_0^x \sin t^2 \, dt$ olarak verilsin.

a. $G(x)$ fonksiyonunun Maclaurin serisini (0 civarındaki Taylor serisi) bulunuz. (Bilinen fonksiyonların Maclaurin serilerini kullanabilirsiniz.)

b. $G(1)$ değerini, hata 0.001'den küçük olacak şekilde yaklaşık olarak hesaplayınız.

ertansinansahin.com

Cevaplar

Örnek sorular

1 a. $[-1,1]$ b. $(-\infty,\infty)$ c. $\{0\}$

2 $f(x)=\arctan x$

3 Videoya gidiniz.

4 a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$ b. $R=1$

5 $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$

6 $f(x)=-3-2(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3$

7 Hata $\le\frac{(0.2)^4}{24}$

8 $\frac{3}{8}$

9 Hata $\le\frac{e^{0.1}}{6000}$

10 a. $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$ b. $1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4$

11 a. $C+x-\frac{x^7}{7\cdot 2!}+\frac{x^{13}}{13\cdot 4!}-\cdots$ b. ≈ 0.929

12 a. $\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

b. $n=50$ terim (son terim $\frac{1}{99}$)

13 $\frac{1}{2}$

14 $\frac{1}{6}$

Alıştırmalar ve problemler

1 a. i. $R=4$, $[-1,7)$ ii. $(-1,7)$ iii. $x=-1$

b. i. $R=1/2$, $(-1,0]$ ii. $(-1,0)$ iii. $x=0$

c. i. $R=5$, $[-5,5]$ ii. $[-5,5]$ iii. $\emptyset$

2 $(-\infty,\ln 2)$, $f(x)=\frac{1}{2-e^x}$

3 Toplam $=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

4 a. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}$ b. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$

5 a. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{3^n}$

b. $(-3,3)$

6 a. $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}$

b. $G(1)\approx\frac{13}{42}\approx 0.3095$

ertansinansahin.com

9. ÜNİTE

PARAMETRİK DENKLEMLER VE KUTUPSAL KOORDİNATLAR

video izle

Düzlem Eğrilerinin Parametrizasyonu

TANIM: t değişkeni belirli bir aralıkta değerler alırken, $x = f(t)$ ve $y = g(t)$ denklemleriyle belirlenen (x, y) noktalar kümesine parametrik eğri denir. Bu denklemlere ise eğrinin parametrik denklemleri adı verilir.

ÖRNEK 1: $y = x^2$ denklemi ile verilen parabolik eğriyi göz önüne alarak aşağıdaki soruları yanıtlayınız:

a. $x = t$ parametresini kullanarak eğrinin $t \in (-\infty, \infty)$ aralığındaki parametrik denklemlerini yazınız.

b. $x = \sqrt{t}$ parametrizasyonunu kullanarak eğrinin $t \geq 0$ için parametrik denklemlerini yazınız ve bu parametrizasyonun eğrinin hangi kısmını temsil ettiğini belirtiniz.

ÖRNEK 2: Aşağıda verilen parametrik denklemlerle tanımlanan eğriyi çiziniz:

$$x = t^2 - 1, \quad y = t + 2, \quad -2 \leq t \leq 2$$

ÖRNEK 3: Aşağıda verilen parametrik denklemlerle tanımlanan eğriyi çiziniz:

$$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

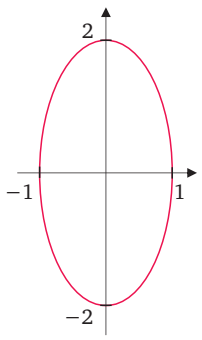
ÖRNEK 4: Aşağıda verilen parametrik denklemleri numaralandırılmış parametrik eğrilerle eşleştiriniz.

a. $x = t, \quad y = t\cos t^2$

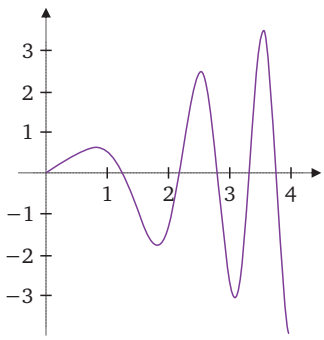
b. $x = t, \quad y = \sqrt{1 - t^2}$

c. $x = \sin t, \quad y = 2\cos t$

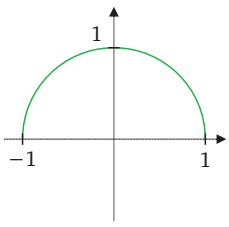
d. $x = t\sin t, \quad y = t\cos t$



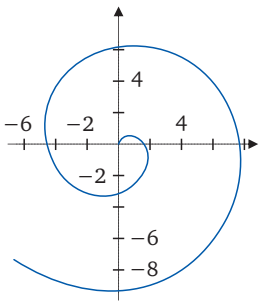
I



II



III



IV

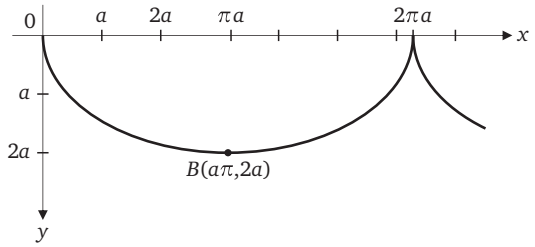
ertansinansahin.com

Sikloit

Bir örnek üzerinden sikloit eğrisini inceleyelim.

ÖRNEK 5: a yarıçaplı bir tekerlek, yatay bir doğru boyunca kaymadan yuvarlanmaktadır. Başlangıçta tekerleğin merkezinin tam altında bulunan tekerlek üzerindeki bir P noktasının izlediği yolun parametrik denklemlerini elde ediniz. P noktası başlangıçta orijindedir.

Brakistokron ve eşoylum eğrilerini inceleyelim.



Parametrik Eğrilerle Kalkülüs

Teğet doğruları ve alanlar

$\frac{dy}{dx}$ ve $\frac{d^2y}{dx^2}$ için parametrik formülleri türetelim.

ÖRNEK 6: $x = 2\cos t$ ve $y = 3\sin t$ denklemleri ile verilen eliptik eğrinin $t = \pi/6$ parametre değerine karşılık gelen noktasındaki teğet doğrusunun denklemini bulunuz.

ÖRNEK 7: $x = t^2 + 1$ ve $y = t^3 + t$ olarak verilen parametrik eğri için $\frac{d^2y}{dx^2}$ ifadesini t cinsinden bulunuz.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 8: Parametrik denklemleri $x = 2\cos t$ ve $y = 2\sin t$ $(0 \leq t \leq \pi/2)$ olan eğri ile eksenler arasında kalan bölgenin alanını integral yardımıyla hesaplayınız.

Parametrik olarak tanımlanmış bir eğrinin uzunluğu

Parametrik olarak tanımlanmış bir eğrinin uzunluğunu nasıl bulacağımızı inceleyelim.

ÖRNEK 9: $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ eğrisinin $0 \leq t \leq \pi$ aralığındaki uzunluğunu hesaplayınız.

Dönel Yüzey Alanları

Parametrik eğriler için dönel yüzey alanı hesabının nasıl yapılacağını inceleyelim.

ÖRNEK 10: $x = \cos^3 t$ ve $y = \sin^3 t$ parametrik denklemleri ile verilen eğrinin $0 \leq t \leq \pi/2$ aralığındaki parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını hesaplayınız.

ertansinansahin.com

Kutupsal Koordinatlar

Kutupsal koordinatları tanımlayalım.

ÖRNEK 11: $P(3, \pi/4)$ noktasının tüm kutupsal koordinatlarını bulunuz.

Aşağıdaki kutupsal denklemlerin karşılık geldiği grafikleri çizelim.

a. $r = 1$ ve $r = -1$

b. $\theta = \pi/4$, $\theta = 5\pi/4$ ve $\theta = -\pi/4$

c. $2 \leq r \leq 4$ ve $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$

d. $-2 \leq r \leq 1$ ve $\theta = \frac{\pi}{6}$

e. $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$

Kutupsal koordinatlarla Kartezyen koordinatlar arasındaki dönüşümleri elde edelim.

ÖRNEK 12: $(x-2)^2 + y^2 = 4$ denklemi ile verilen çemberin kutupsal denklemini bulunuz.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 13: Aşağıda verilen kutupsal denklemleri eşdeğer Kartezyen denklemlere dönüştürünüz ve grafiklerini tanımlayınız.

a. $r \sin\theta = 5$

b. $r^2 = -6r \sin\theta$

c. $r = \frac{6}{3\cos\theta + 2\sin\theta}$

Kutupsal Koordinat Denklemlerinin Grafiğinin Çizilmesi

Kutupsal Koordinatlarda simetri testlerini inceleyelim.

I. x-eksenine göre simetri: Eğer (r,θ) noktası grafiğin üzerindeyse, $(r,-\theta)$ veya $(-r,\pi-\theta)$ noktası da grafik üzerinde yer alır.

II. y-eksenine göre simetri: Eğer (r,θ) noktası grafiğin üzerindeyse, $(r,\pi-\theta)$ veya $(-r,-\theta)$ noktası da grafik üzerinde yer alır.

III. Orijine göre simetri: Eğer (r,θ) noktası grafiğin üzerindeyse, $(-r,\theta)$ veya $(r,\theta+\pi)$ noktası da grafik üzerinde yer alır.

$r=f(\theta)$ şeklinde verilen kutupsal bir eğrinin eğimini elde edelim.

Eğer $r=f(\theta)$ eğrisi orijinden geçiyorsa bu noktadaki eğimini bulalım.

ÖRNEK 14: $r=1-\cos\theta$ denklemi ile verilen eğriyi Kartezyen xy-düzleminde çiziniz.

Kutupsal Koordinatlarda Alanlar ve Uzunluklar

Alan hesabı için gerekli olan alan diferansiyelini elde edelim.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 15: $r=2(1+\sin\theta)$ kardiyoidi tarafından xy-düzleminde sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

$0 \le r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$ ve $\alpha \le \theta \le \beta$ arasında kalan bölgenin alanı için genel bir integral yazalım.

ÖRNEK 16: Kutupsal koordinat sisteminde $r_1(\theta) = 2 + 2\cos\theta$ kardiyoidi ile $r_2(\theta) = 2$ çemberi tarafından sınırlanan bölgeyi göz önüne alarak; çemberin dışında, kardiyoidin ise içinde kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

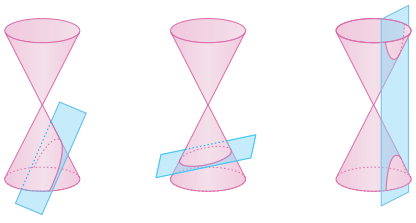
Kutupsal bir eğrinin uzunluğunu nasıl bulacağımızı inceleyelim.

ÖRNEK 17: $r = 1 + \cos\theta$ denklemi ile verilen kardiyoit eğrisinin toplam uzunluğunu hesaplayınız.

ertansinansahin.com

Konik Kesitleri

Parabol, elips ve hiperbolü geometrik olarak tanımlayıp şekilleri inceleyelim.



parabol elips hiperbol

Parabol

TANIM: Bir düzlem içerisinde, belirlenmiş sabit bir noktaya ve sabit bir doğruya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerine parabol denir. Bu sabit nokta parabolün odağı, sabit doğru ise parabolün doğrultmanı olarak adlandırılır.

ÖRNEK 18: $x^2 = -12y$ denklemi ile verilen parabolün odak noktasını ve doğrultman denklemini bulunuz.

ertansinansahin.com

Elips

TANIM: Düzlemdeki iki sabit noktaya olan uzaklıklarının toplamı sabit olan noktalar kümesine elips denir. Bu iki sabit nokta elipsin odakları olarak adlandırılır. Elipsin odaklarından geçen doğruya odak ekseni, bu eksen üzerinde odakların tam ortasında bulunan noktaya ise merkez denir. Odak ekseni ile elipsin kesiştiği noktalara ise elipsin köşeleri adı verilir.

ÖRNEK 19: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ denklemi ile verilen elips için aşağıdaki değerleri hesaplayınız:

a. Yarı büyük eksen (a) ve yarı küçük eksen (b) uzunluklarını bulunuz.

b. Merkezden odağa olan mesafeyi (c) hesaplayınız.

c. Elipsin odak noktalarının koordinatlarını yazınız.

d. Elipsin köşe noktalarının koordinatlarını yazınız.

e. Elipsin merkezini belirtiniz.

Hiperbol

TANIM: Hiperbol, düzlemdeki iki sabit nokta olan odaklar ile arasındaki uzaklık farkı sabit olan noktalar kümesidir. Odak noktalarından geçen doğruya odak ekseni denir. Odaklar arasındaki mesafenin tam orta noktası hiperbolün merkezidir. Odak ekseni ile hiperbol eğrisinin kesiştiği noktalar ise köşeler olarak adlandırılır.

ÖRNEK 20: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ denklemi ile verilen hiperbolün aşağıda belirtilen karakteristik özelliklerini bulunuz.

a. Merkez
b. Köşeler
c. Odaklar
d. Asimptotlar

ertansinansahin.com

Parabol, elips ve hiperbol için yazdığımız denklemlerde x ve y'nin yer değiştirmesi durumunda neler olacağını tartışalım.

Kutupsal Koordinatlarda Konikler

Dışmerkezlik

Konik kesitlerde dışmerkezlik e ile gösterilir.

$a > b$ olmak üzere $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi için

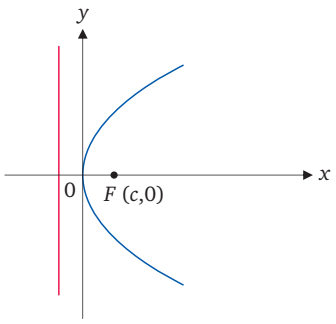
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

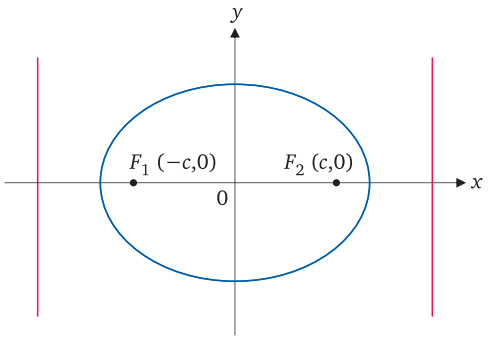
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolü için

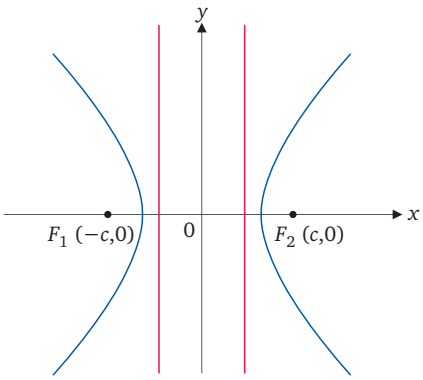
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a},$$

parabolde ise $e = 1$'dir.

Aşağıdaki şekiller üzerinden dışmerkezlik değerini detaylı bir şekilde inceleyelim.







ÖRNEK 21: Merkezi orijinde olan, odak noktalarından biri $(5,0)$ noktasında bulunan ve bu odağa karşılık gelen doğrultman doğrusu $x = \frac{9}{5}$ olan hiperbolün Kartezyen denklemini bulunuz.

ertansinansahin.com

Kutupsal denklemler

Bir parabolün, elipsin ya da hiperbolün kutupsal denklemini nasıl elde edeceğimizi görelim.

ÖRNEK 22: Dışmerkezliği $e = 2$ olan ve $x = 3$ doğrusunu doğrultman kabul eden hiperbolün standart denklemini bulunuz. Hiperbolün odağı orijindedir.

ÖRNEK 23: Denklemi $r = \frac{12}{3-6\cos\theta}$ olan eğriyi ele alınız.

a. Bu konik kesitin dışmerkezliğini (e) bularak türünü belirleyiniz.

b. Doğrultman doğrusunun denklemini bulunuz.

c. Eğrinin x-ekseni üzerindeki köşelerini belirleyiniz.

Dışmerkezliği e ve yarı büyük ekseni a olan elipsin kutupsal denklemini elde edelim.

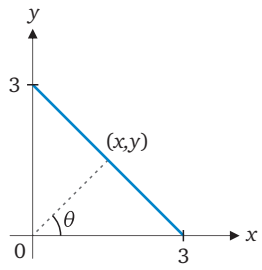
Bir doğrunun kutupsal koordinatlardaki denklemini elde edelim.

ertansinansahin.com

Bir çemberin kutupsal koordinatlardaki denklemini elde edelim.

Alıştırmalar ve Problemler

1. $(0,3)$ ve $(3,0)$ noktalarını birleştiren doğru parçasını, şekildeki gibi orijinden geçen θ açısını parametre olarak kullanarak parametrize ediniz.



2. $(x+3)^2+(y-1)^2=4$ çemberi için $(-1,1)$ noktasından başlayan, saat yönünde çember etrafında bir tam tur atan ve parametre olarak merkez açısı θ'yı kullanan bir parametrizasyon bulunuz.

3. $r^2=\sin\theta$ denklemi ile verilen eğriyi Kartezyen xy-düzleminde çiziniz.

4. Kutupsal denklemi $r=4\cos\theta$ olarak verilen çemberin, $\pi/6\le\theta\le\pi/3$ aralığında kalan bölgesinin alanını hesaplayınız.

ertansinansahin.com

5. $x^2-4y^2-4x+8y-4=0$ denkleminin bir hiperbol belirttiğini gösteriniz. Bu hiperbolün merkezini, odak noktalarını ve asimptotlarını bulunuz.

6. Dışmerkezliği $e=\frac{3}{5}$ olan ve odak noktalarından biri kutupsal koordinat düzleminin başlangıç noktasında (orijinde) bulunan bir konik kesitin, bu odağa karşılık gelen doğrultman denklemi $r\cos\theta=10$ olarak verilmiştir. Bu konik kesit için bir kutupsal denklem bulunuz.

ertansinansahin.com

Cevaplar

Örnek sorular

1	a. $x=t,\quad y=t^2,\quad t\in\mathbb{R}$ b. $x=\sqrt{t},\quad y=t,\quad x\geq 0$ (Sağ kol)
2	Videoya gidiniz.
3	Videoya gidiniz.
4	a. II b. III c. I d. IV
5	$x=a(\theta-\sin\theta)\quad y=a(1-\cos\theta)$
6	$y=-\frac{3\sqrt{3}}{2}x+6$
7	$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3t^2-1}{4t^3}$
8	$A=\pi$
9	$L=\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$
10	$S=\frac{6\pi}{5}$
11	$(3,\frac{\pi}{4}+2n\pi)$ ve $(-3,\frac{5\pi}{4}+2n\pi),\ n\in\mathbb{Z}$
12	$r=4\cos\theta$
13	a. $y=5$, doğru b. $x^2+(y+3)^2=9$, çember c. $3x+2y=6$, doğru
14	Videoya gidiniz.
15	$A=6\pi$
16	$A=8+\pi$
17	$L=8$
18	Odak: $(0,-3)$ Doğrultman: $y=3$
19	a. $a=5,\ b=3$ b. $c=4$ c. $(4,0)$ ve $(-4,0)$ d. $(5,0)$ ve $(-5,0)$ e. $(0,0)$
20	a. $M(0,0)$ b. $V_1(-3,0),\ V_2(3,0)$ c. $F_1(-5,0),\ F_2(5,0)$ d. $y=\pm\frac{4}{3}x$
21	$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$
22	$r=\frac{6}{1+2\cos\theta}$

23	a. $e = 2$, Hiperbol b. $x = -2$ c. $(-4,0)$ ve $(-\frac{4}{3},0)$

Alıştırmalar ve problemler

1	$x = \frac{3\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$, $y = \frac{3\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$
2	$x = -3 + 2\cos\theta$, $y = 1 - 2\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$
3	Videoya gidiniz.
4	$A = \frac{2\pi}{3}$
5	Merkez: $(2,1)$ Odaklar: $(2 \pm \sqrt{5},1)$ Asimptotlar: $y - 1 = \pm\frac{1}{2}(x-2)$
6	$r = \frac{30}{5+3\cos\theta}$

ertansinansahin.com

10. ÜNİTE
VEKTÖRLER VE UZAY GEOMETRİSİ

video izle

Motivasyon

Bu konuyu ele alma motivasyonumuzu değerlendirelim.

Üç Boyutlu Koordinat Sistemleri

- Uzayda bir noktayı belirtmek için üç boyutlu koordinat sistemini tanımlayalım.
- x, y ve z eksenlerinin uzaydaki konumunu inceleyelim.
- Sağ el koordinat sisteminin ne ifade ettiğini görelim.
- Bir noktanın (x, y, z) koordinatlarının nasıl yorumlandığını tartışalım.
- Koordinat düzlemlerini tanıyalım: xy-düzlemi, yz-düzlemi ve xz-düzlemi.
- Orijin noktasının uzaydaki rolünü değerlendirelim.
- Koordinat düzlemlerinin uzayı nasıl parçaladığını görelim.
- Oktant kavramını tanımlayalım.
- $x = 1$, $y = 2$, $z = 4$ düzlemlerini yorumlayalım.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 1: Aşağıda verilen denklem ve eşitsizlik sistemlerinin üç boyutlu Kartezyen koordinat sisteminde tanımladığı geometrik bölgeleri ve nesneleri belirleyiniz.

a. $x = 5,\ y = -2$

b. $x \geq 0,\ z = 0$

c. $0 \leq z \leq 3$

d. $x = 0,\ y = 0,\ z \geq 0$

ÖRNEK 2: Üç boyutlu uzayda $x^2 + z^2 = 9$ ve $y = -2$ denklemlerini aynı anda sağlayan noktaların oluşturduğu geometrik yapıyı tanımlayınız ve bu yapının merkezini ve yarıçapını belirleyiniz.

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2(x_2, y_2, z_2)$ noktaları arasındaki uzaklığı ifade edelim.

Merkezi (x_0, y_0, z_0) ve yarıçapı a olan kürenin standart denklemini inceleyelim.

ÖRNEK 3: $x^2+y^2+z^2-4x+6y-3=0$ denklemiyle verilen kürenin merkezini ve yarıçapını bulunuz.

ÖRNEK 4: Aşağıda verilen denklemlerin ve eşitsizliklerin $\mathbb{R}^3$ uzayında tanımladığı geometrik bölgeleri ifade ediniz.

a. $x^2+y^2+z^2=9, \quad y \geq 0$

b. $1 < x^2+y^2+z^2 < 16$

c. $x^2+y^2+z^2=25, \quad z=3$

ertansinansahin.com

Vektörler

Vektör kavramına neden ihtiyaç duyduğumuzu tartışalım.

TANIM: $\overline{AB}$ yönlü doğru parçası ile temsil edilen vektörün başlangıç noktası A, bitiş noktası ise B'dir; uzunluğu $|\overline{AB}|$ ile gösterilir. İki vektör, aynı uzunluğa ve aynı yöne sahip olmaları durumunda eşit kabul edilir.

TANIM: Eğer $\mathbf{v}$, başlangıç noktası orijin olan ve bitiş noktası (v_1, v_2) olan bir vektöre eşit düzlemde iki boyutlu bir vektör ise, $\mathbf{v}$'nin bileşen formu şöyledir:

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$$

Eğer $\mathbf{v}$, başlangıç noktası orijin ve bitiş noktası (v_1, v_2, v_3) olan bir vektöre eşit üç boyutlu bir vektör ise, v'nin bileşen formu şöyledir:

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

Başlangıç noktası $P(x_1, y_1, z_1)$ ve bitiş noktası $Q(x_2, y_2, z_2)$ olan vektörü yazıp vektörün büyüklüğünü bulalım.

ÖRNEK 5: Başlangıç noktası $P(2, -1, 4)$ ve bitiş noktası $Q(5, 3, -8)$ olan bir vektör veriliyor. Buna göre;

a. Vektörün bileşen formunu bulunuz.

b. Vektörün büyüklüğünü hesaplayınız.

$\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ ve $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ vektörleri için toplama ve skalerle çarpma işlemlerini tanımlayalım.

ÖRNEK 6: $\mathbf{u} = \langle 2, -4, 3 \rangle$ ve $\mathbf{v} = \langle -1, 5, 2 \rangle$ vektörleri veriliyor. Aşağıda verilenleri bulunuz:

a. $3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ b. $\left|\frac{1}{3}\mathbf{u}\right|$ c. $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ birer vektör ve a, b birer skaler olmak üzere aşağıdaki vektör işlemlerini inceleyelim.

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
- $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
- $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$
- $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$
- $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
- $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$

Birim vektörler

Birim vektör kavramını ve temel özelliklerini tanımlayalım. Standart birim vektörleri $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ koordinat düzleminde gösterelim.

Herhangi bir $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ vektörünü standart birim vektörlerin lineer kombinasyonu olarak yazalım. Bu vektörle aynı yönlü birim vektörü elde edelim.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 7: $P_1(1, 1, 0)$ noktasından $P_2(3, 1, 1)$ noktasına doğru yönelmiş olan vektörün yönündeki birim vektör $\mathbf{u}$'yu bulunuz.

Bir doğru parçasının orta noktası

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2(x_2, y_2, z_2)$ noktalarını birleştiren doğru parçasının orta noktasını nasıl belirlediğimizi inceleyelim.

Uygulamalar

Vektörlerin bir uygulamasını bir örnek üzerinden inceleyelim.

ÖRNEK 8: Bir inşaat sahasında 150 N ağırlığındaki bir beton blok, iki çelik halat yardımıyla düşey düzlemde asılı tutulmaktadır. Sistem statik dengededir.

a. Birinci halat düşeyle sola doğru 45°, ikinci halat ise düşeyle sağa doğru 30° açı yapmaktadır. Her bir halattaki gerilme kuvvetinin büyüklüğünü ($|\mathbf{F_1}|$ ve $|\mathbf{F_2}|$) hesaplayınız.

b. Halatların uyguladığı toplam yukarı yönlü kuvvetin büyüklüğünün bloğun ağırlığının büyüklüğüne oranı kaçtır?

ertansinansahin.com

Nokta Çarpımı

Bir vektörün diğeri üzerindeki izdüşümünün büyüklüğünü nasıl elde edebileceğimizi tartışalım.

TEOREM: Sıfırdan farklı $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ ve $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ vektörleri arasındaki θ açısı aşağıdaki formülle verilir:

$$\theta = \arccos\left(\frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right)$$

TANIM: $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ ve $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ vektörlerinin nokta çarpımı aşağıdaki skaler değerdir:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

ÖRNEK 9: $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ve $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$ vektörleri veriliyor. θ vektörler arasındaki açı olmak üzere aşağıdaki işlemleri yapınız:

a. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ nokta çarpımını hesaplayınız.

b. $|\mathbf{u}|$ ve $|\mathbf{v}|$ uzunluklarını bulunuz.

c. $\cos\theta$ değerini bulunuz.

d. θ açısını derece cinsinden yaklaşık olarak bulunuz.

ÖRNEK 10: Köşeleri $A=(1,2)$, $B=(4,6)$ ve $C=(5,-1)$ noktaları olan bir ABC üçgeni veriliyor. A köşesindeki θ açısını bulunuz.

Ortogonal vektörler

Sıfırdan farklı iki vektörün birbirine dik olma koşulunu yazalım.

Nokta çarpım özellikleri

Nokta çarpımın cebirsel özelliklerini listeleyelim.

$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ herhangi bir vektör ve c bir skaler olmak üzere,

- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$
- $(c\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot(c\mathbf{v})=c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$
- $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$
- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=|\mathbf{u}|^2$
- $\mathbf{0}\cdot\mathbf{u}=0$

Vektör izdüşümü

Bir vektörün diğeri üzerindeki izdüşümünü tanımlayalım ve matematiksel olarak ifade edelim.

ÖRNEK 11:

$\mathbf{u}=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k}$ vektörünün $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ vektörü üzerindeki;

a. Skaler bileşenini bulunuz.

b. Vektör izdüşümünü bulunuz.

ÖRNEK 12: $\mathbf{u}-\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ vektörünün, $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ izdüşüm vektörüne dik olduğunu doğrulayınız.

ertansinansahin.com

İş

Sabit bir kuvvet tarafından belirli bir yer değiştirme sonucunda yapılan işi yazalım.

Vektörel Çarpım

İki vektörü çarparak onlara dik yeni bir vektörü nasıl elde edebileceğimizi tartışalım.

- İki vektörün birbirine paralellik koşulunu yazalım.
- Vektörel çarpımla bir paralelkenarın alanını nasıl elde edeceğimizi inceleyelim.

Vektörel çarpımın özelliklerini inceleyelim.

Eğer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ herhangi üç vektör; a ve b skalerler ise, aşağıdaki özellikler geçerlidir:

- $(a\mathbf{u}) \times (b\mathbf{v}) = (ab)(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
- $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$
- $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
- $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \mathbf{w} \times \mathbf{u}$
- $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$

Standart birim vektörlerin birbirleriyle vektörel çarpımını inceleyelim.

Herhangi iki $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ ve $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ vektörlerinin vektörel çarpımı için determinant yöntemini yazalım.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 13: $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ve $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ vektörleri veriliyor. Buna göre aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız:

a. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektörel çarpımını bulunuz.

b. $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ vektörel çarpımını bulunuz.

ÖRNEK 14: $P(2,-1,3)$, $Q(1,1,-1)$ ve $R(-2,0,1)$ noktaları veriliyor.

a. P, Q ve R noktalarını içeren düzleme dik bir vektör bulunuz.

b. Köşeleri P, Q ve R noktaları olan üçgenin alanını hesaplayınız.

Tork

Tork kavramını açıklayıp bu vektör için bir eşitlik yazalım.

Üçlü skaler veya kutu çarpımı

Üç vektör içeren $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ çarpımını inceleyelim.

ertansinansahin.com

Uzayda Doğrular ve Düzlemler

Uzayda doğrular ve doğru parçaları

Uzayda bir doğrunun nasıl ifade edildiğini inceleyelim.

- Bir doğrunun vektör denklemini yazalım.
- Bir doğrunun parametrik denklemlerini yazalım.
- Bir doğrunun standart denklemini yazalım.
- Bir doğru parçasının nasıl ifade edileceğini tartışalım.
- İki doğrunun birbirine paralel olma koşulunu tartışalım.

ÖRNEK 15: $P(2,-4,1)$ ve $Q(5,0,-3)$ noktalarından geçen doğrunun parametrik denklemlerini bulunuz.

Doğrunun vektörel denklemini fizikteki hareket yorumu üzerinden inceleyelim.

Bir doğru ve bir nokta arasındaki mesafenin nasıl hesaplanacağını inceleyelim.

ÖRNEK 16: $P(1,1,5)$ noktasının, parametrik denklemleri $x = 1 + t$, $y = 3 - t$, ve $z = 2t$ olan doğruya olan uzaklığını hesaplayınız.

ertansinansahin.com

Uzayda düzlem denklemi

Sıfırdan farklı $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ vektörüne dik olan ve $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen düzlemin denklemini yazalım.

ÖRNEK 17: $A(2,1,1)$, $B(0,4,1)$ ve $C(-2,1,4)$ noktaları veriliyor.

a. Bu üç noktayı içeren düzleme dik olan bir $\mathbf{n}$ normal vektörünü bulunuz.

b. Bu noktaların üzerinde bulunduğu düzlemin denklemini yazınız.

İki düzlemin birbirine paralel olma koşulunu tartışalım. Birbirine paralel olmayan iki düzlemin kesişimi olan doğruyu nasıl bulacağımızı açıklayalım.

ÖRNEK 18: $x+2y+3z=4$ ve $2x-y-z=3$ denklemleri ile verilen iki düzlem için;

a. Bu iki düzlemin arakesit doğrusuna paralel bir $\mathbf{v}$ vektörü bulunuz.
b. Bu arakesit doğrusunun parametrik denklemlerini yazınız.

ÖRNEK 19: $x=1+t$, $y=2-t$, $z=3+2t$ parametrik denklemleriyle verilen doğrunun, $x+y+z=10$ düzlemi ile kesiştiği noktanın koordinatlarını bulunuz.

Bir noktanın bir düzleme olan uzaklığını nasıl bulacağımızı tartışalım.

ÖRNEK 20: $P(2,4,3)$ noktasının $2x+y+2z=3$ düzlemine olan uzaklığını bulunuz.

ertansinansahin.com

Bir örnek üzerinden iki düzlem arasındaki açıyı nasıl bulacağımızı inceleyelim.

ÖRNEK 21: $x+y=10$ ve $y+z=12$ düzlemleri arasındaki açıyı bulunuz.

Silindirler ve Kuadrik Yüzeyler

Silindirler

Bir silindirin nasıl oluştuğunu inceleyelim.

ÖRNEK 22: $x = z^2$, $y = 0$ parabolünden geçen ve y-eksenine paralel olan doğruların oluşturduğu silindirin denklemini bulunuz.

Kuadrik yüzeyler

Kuadrik yüzeylerin nasıl elde edildiğini inceleyelim.

ÖRNEK 23: Aşağıdaki denklemle ifade edilen kuadrik yüzeyi çizelim:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

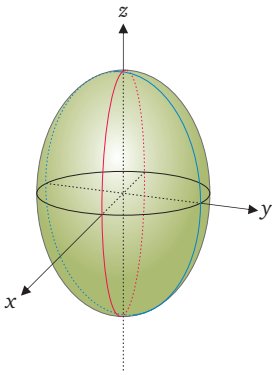
ÖRNEK 24: Aşağıdaki denklemle ifade edilen kuadrik yüzeyi çizelim:

$$4x^2 + 9y^2 + z^2 - 16x + 18y - 11 = 0$$

ertansinansahin.com

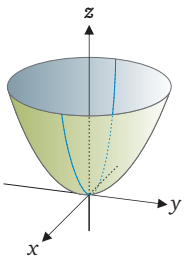
Bazı özel kuadrik yüzeyleri inceleyelim.

Elipsoid



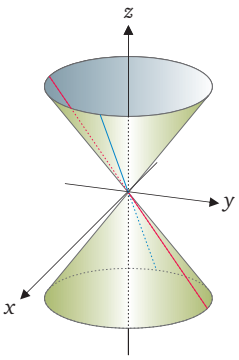
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Eliptik paraboloid



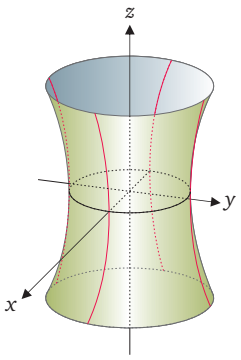
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

Eliptik koni



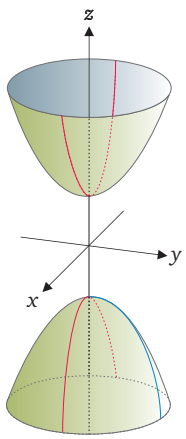
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

Tek yapraklı hiperboloid



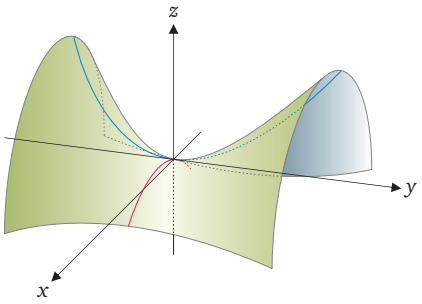
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Çift yapraklı hiperboloid



$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hiperbolik paraboloid



$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}, \quad c > 0$$

Alıştırmalar ve Problemler

1. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ve $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ vektörleri veriliyor. Buna göre:

a. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasındaki açının kosinüsünü hesaplayınız.

b. $\mathbf{u}$ vektörünün $\mathbf{v}$ vektörü üzerindeki izdüşüm vektörünü ($\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$) bulunuz.

2. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\mathscr{L}_1$ doğrusu parametrik denklemleri ile, $\mathscr{L}_2$ doğrusu ise vektörel denklemi ile verilmiştir:

- $\mathscr{L}_1 : x = 1 + 2t, \quad y = 2 + t, \quad z = 3 - t \quad (t \in \mathbb{R})$
- $\mathscr{L}_2 : \mathbf{r}(s) = \langle 2, 1, 0\rangle + s\langle 1, 2, 2\rangle \quad (s \in \mathbb{R})$

a. $\mathscr{L}_1$ ve $\mathscr{L}_2$ doğrularının kesiştiği P noktasının koordinatlarını bulunuz.

b. Bu iki doğru arasındaki dar açının kosinüs değerini hesaplayınız.

ertansinansahin.com

3. $P(0,1,0)$ noktasından geçen ve $\mathscr{L}: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-2}$ doğrusunu dik olarak kesen düzlemin denklemini bulunuz. Ardından, bu düzlemin $\mathscr{L}$ doğrusunu kestiği Q noktasının koordinatlarını hesaplayınız.

a. Düzlemin denklemini yazınız.

b. Kesişim noktası Q'yu bulunuz.

4. $A(2,1,1)$, $B(3,4,1)$, $C(1,2,3)$ ve $D(2,5,3)$ noktalarının aynı düzlem üzerinde olduğunu gösteriniz.

5. $\mathscr{L}_1$ doğrusu $(1,2,3)$ noktasından geçen ve $\mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ doğrultusuna sahip olan bir doğrudur. $\mathscr{L}_2$ doğrusu ise $x = 2+2t, y = 1-t, z = 3t$ parametrik denklemleriyle verilmiştir. Bu iki doğru arasındaki en kısa mesafeyi hesaplayınız.

6. $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x = 1+t$, $y = 2+4t$, $z = 3+t$ parametrik denklemleriyle verilen doğru ile $2x - y + 2z = 10$ düzlemi arasındaki uzaklığı bulunuz.

ertansinansahin.com

Cevaplar

Örnek sorular

1 Videoya gidiniz.

2 Videoya gidiniz.

3 Merkez: $(2,-3,0)$, Yarıçap: $r=4$

4 Videoya gidiniz.

5 a. $\mathbf{v}=\langle 3,4,-12\rangle$ b. $|\mathbf{v}|=13$

6 a. $\langle 4,-2,13\rangle$ b. $\frac{\sqrt{29}}{3}$ c. $\sqrt{91}$

7 $\mathbf{u}=\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$

8 a. $|\mathbf{F}_1|\approx 77.65$ N, $|\mathbf{F}_2|\approx 109.81$ N b. 1

9 a. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=14$ b. $|\mathbf{u}|=3$, $|\mathbf{v}|=5$
c. $\cos\theta=\frac{14}{15}$ d. $\theta\approx 21.04^\circ$

10 $\theta=90^\circ$

11 a. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ b. $\frac{5}{3}\mathbf{i}+\frac{5}{3}\mathbf{j}+\frac{5}{3}\mathbf{k}$

12 Videoya gidiniz.

13 a. $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=3\mathbf{i}+7\mathbf{j}+5\mathbf{k}$
b. $\mathbf{v}\times\mathbf{u}=-3\mathbf{i}-7\mathbf{j}-5\mathbf{k}$

14 a. $\mathbf{n}=\langle 0,2,1\rangle$
b. $A=\frac{7\sqrt{5}}{2}$

15 $x=2+3t$, $y=-4+4t$, $z=1-4t$

16 $d=\sqrt{5}$

17 a. $\mathbf{n}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ b. $3x+2y+4z=12$

18 a. $\mathbf{v}=\mathbf{i}+7\mathbf{j}-5\mathbf{k}$
b. $x=2+t$, $y=1+7t$, $z=-5t$

19 $(3,0,7)$

20 $d=\frac{11}{3}$

21 $\theta=60^\circ$ veya $\theta=\frac{\pi}{3}$

22 $x=z^2$

23 Videoya gidiniz.

24 Videoya gidiniz.

Alıştırmalar ve problemler

1 a. $\cos\theta=\frac{2}{15}$ b. $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}=\frac{6}{25}\mathbf{i}+\frac{8}{25}\mathbf{j}$

2 a. $P(3,3,2)$ b. $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$

3 a. $2x+y-2z=1$ b. $Q(-1,1,-1)$

4 Videoya gidiniz.

5 $d=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

6 $d=\frac{4}{3}$

ertansinansahin.com

12. ÜNİTE
KISMİ TÜREVLER - 1

video izle

Motivasyon

Bu konuyu öğrenme motivasyonumuzu ortaya koyalım.

Çok Değişkenli Fonksiyonlar

- Birden fazla değişkene bağlı fonksiyon fikrini tanıyalım.
- Günlük hayattan çok değişkenli fonksiyon örneklerini düşünelim.
- $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gösteriminin ne anlattığını tartışalım.
- Bağımsız ve bağımlı değişken ayrımını netleştirelim.
- Tanım kümesi ve değer kümesi kavramlarını bu bağlamda inceleyelim.

Aşağıda verilen fonksiyonların tanım ve değer kümelerini inceleyelim.

- $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$
- $f(x,y) = \ln(x+y)$
- $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$
- $f(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$
- $f(x,y,z) = e^{xyz}$
- $f(x,y,z) = xy \ln z$

- Düzlemdeki bir bölgenin iç nokta ve sınır noktası kavramlarını tanımlayalım.
- Bir bölgenin açık veya kapalı olma durumunu sınır noktaları üzerinden ifade edelim.
- $x^2 + y^2 < 1$ eşitsizliğinin neden bir açık küme belirttiğini tartışalım.
- Bir bölgenin sınırlı ya da sınırsız olmasının ne anlama geldiğini örnekler üzerinden tartışalım.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 1: $f(x,y) = \ln\left(4 - x^2 - 4y^2\right)$ fonksiyonu veriliyor.

a. Fonksiyonun tanım kümesini (D) bulunuz.

b. Tanım kümesini xy-düzleminde betimleyiniz ve sınırın tanım kümesine dahil olup olmadığını belirtiniz.

İki değişkenli fonksiyonların grafikleri, seviye eğrileri ve kontur çizgileri

- İki değişkenli fonksiyonları görselleştirmenin temel yollarını ele alalım.
- $f(x,y)$ değerlerini görselleştirmek için seviye eğrilerini ve $z=f(x,y)$ yüzeyini nasıl kullanacağımızı tartışalım.
- Seviye eğrileri ve kontur çizgileri arasındaki farkı inceleyelim.

ÖRNEK 2: $f(x,y)=144-x^2-y^2$ fonksiyonunun grafiğini çizin ve düzlemdeki tanım kümesi içerisinde $f(x,y)=0$, $f(x,y)=44$ ve $f(x,y)=108$ seviye eğrilerini belirleyip grafiklerini oluşturun.

Üç değişkenli fonksiyonlar için benzer bir inceleme yapalım. $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ fonksiyonunun seviye yüzeylerini inceleyelim.

ertansinansahin.com

Yüksek Boyutlarda Limit ve Süreklilik

TANIM: (x_0,y_0) merkezli her açık dairesel bölgenin, (x_0,y_0) noktasının kendisi dışında, f fonksiyonunun tanım kümesinden en az bir nokta içerdiğini varsayalım. (x,y) noktası (x_0,y_0)'ya yaklaşırken, $f(x,y)$ fonksiyonunun L sayısına yaklaştığını söyleriz ve bunu

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

şeklinde gösteririz.

Bunun anlamı şudur: Her $\varepsilon>0$ için, buna karşılık bir $\delta>0$ vardır; öyle ki, f'nin tanım kümesindeki her (x,y) noktası için,

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

olduğunda,

$$|f(x,y)-L|<\varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır.

L, M ve k reel sayılar olsun. Eğer $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$ ve $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=M$ ise:

- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[f(x,y)+g(x,y)]=L+M$
- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[f(x,y)-g(x,y)]=L-M$
- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} kf(x,y)=kL$ (herhangi bir k sayısı için)
- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[f(x,y)\cdot g(x,y)]=L\cdot M$
- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{L}{M}, \quad M\neq 0$
- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[f(x,y)]^n=L^n \quad (n\in\mathbb{Z}^+)$
- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x,y)}=\sqrt[n]{L}=L^{1/n}$
  (n pozitif bir tam sayı; n çift ise $L>0$ olduğu varsayılır.)
- $h(z)$ fonksiyonu $z=L$ noktasında sürekli ise:
  $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(f(x,y))=h(L)$

ÖRNEK 3: Aşağıdaki limit değerlerini hesaplayınız.

a. $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2-xy+2}{x^2y+3xy-y^2}$

b. $\lim_{(x,y)\to(0,3)} \sqrt{x^2+y^2+16}$

c. $\lim_{(x,y)\to(0,\pi/2)} \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos y}{y-\pi/2}\right)$

d. $\lim_{(x,y)\to(4,4)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

ÖRNEK 4: $f(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$ fonksiyonunun $(x,y)\to(0,0)$ noktasındaki limitinin 0 olduğunu $\varepsilon-\delta$ tanımını kullanarak ispatlayınız.

Süreklilik

TANIM: (x_0,y_0) merkezli her açık dairesel bölgenin, (x_0,y_0) noktasının kendisi dışında, f fonksiyonunun tanım kümesinden en az bir nokta içerdiğini varsayalım. Bu durumda, $f(x,y)$ fonksiyonu aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa (x_0,y_0) noktasında süreklidir:

1. f, (x_0,y_0) noktasında tanımlıdır.
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ limiti vardır.
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

Bir fonksiyon, tanım kümesindeki her noktada sürekli ise sürekli fonksiyon olarak adlandırılır.

ÖRNEK 5: $f(x,y)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Bu fonksiyonun orijin dışındaki noktalarda sürekli olduğunu gösteriniz ve orijindeki sürekliliğini inceleyiniz.

Bir örnek üzerinden iki yol testini kullanarak limitin belirli bir noktada olmadığını gösterelim.

ÖRNEK 6: $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^6+y^2}$ fonksiyonunun $(x,y)\to(0,0)$ limitinin var olmadığını gösteriniz.

ÖRNEK 7: Aşağıda verilen fonksiyonların süreklilik durumlarını tartışınız:

a. $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

b. $g(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y^2+1}\right)$

c. $h(x,y) = \ln\left(4+x^2+y^2\right)$

ertansinansahin.com

Kısmi Türevler

$f(x,y)$ fonksiyonunun (x_0,y_0) noktasındaki x'e ve y'ye göre kısmi türevlerini tanımlayalım. Kısmi türevler için kullandığımız notasyonları inceleyelim.

Bir örnek üzerinden kısmi türevin nasıl alındığını inceleyelim.

ÖRNEK 8: $f(x,y)=x^3-2x^2y+4y^2-5$ fonksiyonu veriliyor.

a. $\frac{\partial f}{\partial x}$ ve $\frac{\partial f}{\partial y}$ kısmi türevlerini bulunuz.

b. Bu kısmi türevlerin $(2,-1)$ noktasındaki değerlerini hesaplayınız.

ÖRNEK 9: $x^2e^z+y\sin z=\ln x+y^2$ denkleminin z değişkenini x ve y bağımsız değişkenlerine bağlı bir fonksiyon olarak tanımladığını varsayarak, $\frac{\partial z}{\partial y}$ kısmi türevini bulunuz.

Bir örnek üzerinden ikiden fazla değişkenli fonksiyonlarda kısmi türevin nasıl alındığını inceleyelim.

ÖRNEK 10: x, y ve z bağımsız değişkenler olmak üzere, $f(x,y,z)=z^2\cdot\cos\left(x^3+2y\right)$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $\frac{\partial f}{\partial x}$ kısmi türevini hesaplayınız.

ÖRNEK 11: $f(x,y)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi veriliyor:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a. $(x,y)\to(0,0)$ limitini $y=x$ doğrusu boyunca bulunuz.

b. $(x,y)\to(0,0)$ limitini $y=0$ doğrusu (x-ekseni) boyunca bulunuz.

c. f fonksiyonunun orijinde $(0,0)$ sürekli olmadığını gösteriniz.

d. Tanımı kullanarak $\frac{\partial f}{\partial x}$ ve $\frac{\partial f}{\partial y}$ kısmi türevlerinin orijinde var olduğunu gösteriniz ve değerlerini bulunuz.

ertansinansahin.com

Bir örnek üzerinden ikinci ve daha üst dereceden kısmi türevleri inceleyelim.

ÖRNEK 12: $f(x,y) = x^2 \sin y + y^2 e^x$ fonksiyonu veriliyor.

a. Fonksiyonun birinci mertebeden kısmi türevlerini ($\frac{\partial f}{\partial x}$ ve $\frac{\partial f}{\partial y}$) bulunuz.

b. Fonksiyonun tüm ikinci mertebeden kısmi türevlerini ($\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ve $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$) hesaplayınız.

c. Karma türevlerin ($\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ve $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$) birbirine eşit olduğunu gösteriniz.

d. $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ ve $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ üçüncü mertebeden kısmi türevlerini hesaplayınız.

Diferansiyellenebilirlik

Bir fonksiyon için diferansiyellenebilirlik kavramının ne anlama geldiğini gösterelim. Fonksiyonun sürekliliği ile bu kavram arasındaki ilişkiyi tartışalım.

İki farklı fonksiyon grafiğini inceleyerek fonksiyonların diferansiyellenebilirlik durumunu tartışalım.

- $f(x,y) = x^2 + y^2$
- $g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Zincir Kuralı

- $x = x(t)$ ve $y = y(t)$ fonksiyonlarının her ikisi de t değişkenine göre türevlenebilir olduğunda, türevlenebilir bir $w = f(x,y)$ fonksiyonu için zincir kuralını yazalım.
- İkiden fazla değişken olması durumunda ne olacağını tartışalım.

ertansinansahin.com

$w = f(x,y,z)$, $x = g(r,s)$, $y = h(r,s)$ ve $z = k(r,s)$ olduğunu varsayalım. Eğer bu dört fonksiyonun tamamı türevlenebilir durumdaysa, bu durumda w fonksiyonunun r ve s değişkenlerine göre kısmi türevleri vardır ve aşağıdaki formüllerle verilir:

ÖRNEK 13: $w = x^2y + z^3$ fonksiyonu veriliyor. Burada $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ve $z = r^2$ olduğuna göre; $\frac{\partial w}{\partial r}$ ve $\frac{\partial w}{\partial \theta}$ kısmi türevlerini r ve θ cinsinden ifade ediniz.

a. $\frac{\partial w}{\partial r}$ b. $\frac{\partial w}{\partial \theta}$

Eğer $w = f(x)$ ve $x = g(r,s)$ ise, bu durumda kısmi türevler aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial r} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial s}.$$

Bir örnek üzerinden örtük türev almayı inceleyelim.

ÖRNEK 14: $e^{xy} + x^2 - y^3 = 5$ denklemi ile verilen örtük fonksiyon için $\frac{dy}{dx}$ türevini hesaplayınız.

Yönlü Türevler ve Gradyan Vektörleri

$f(x,y)$ fonksiyonunun gradyan vektörünü tanımlayalım.

$f(x,y)$ fonksiyonunun $P_0(x_0,y_0)$ noktasını içeren açık bir bölgede türevlenebilir olduğunu varsayalım ve fonksiyonun bu noktada $\mathbf{u}$ birim vektörü yönündeki yönlü türevini yazalım.

ÖRNEK 15: $f(x,y) = y^2\sin(xy) + 3x$ fonksiyonunun $P(1,0)$ noktasında, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ vektörü yönündeki yönlü türevini bulunuz.

ertansinansahin.com

Bir örnek üzerinden yönlü türevlerin özelliklerini inceleyelim.

ÖRNEK 16: $f(x,y)=\frac{x^3}{3}+\frac{y^2}{2}$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre;

a. $(2,1)$ noktasında fonksiyonun en hızlı arttığı yönü bulunuz.

b. $(2,1)$ noktasında fonksiyonun en hızlı azaldığı yönü bulunuz.

c. $(2,1)$ noktasında fonksiyonun değişiminin sıfır olduğu yönleri bulunuz.

- Bir fonksiyonun gradyanı ve seviye eğrileri arasındaki ilişkiyi inceleyelim.
- Bir fonksiyonun seviye eğrisine teğet olan doğrunun denklemini elde edelim.

ÖRNEK 17: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2$ elipsi üzerindeki $(-3,2)$ noktasından geçen teğet doğrusunun denklemini bulunuz.

Gradyan için cebirsel kuralları inceleyelim.

- $\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g$
- $\nabla(f-g)=\nabla f-\nabla g$
- $\nabla(kf)=k\nabla f$
- $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$
- $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\nabla f-f\nabla g}{g^2}$

ertansinansahin.com

Bir örnek üzerinden yönlü türevleri bir de üç boyutta inceleyelim.

ÖRNEK 18: $f(x,y,z)=x^2y+\cos(yz)+2z$ fonksiyonunun $P_0(2,0,1)$ noktasındaki;

a. $\mathbf{v}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ vektörü yönündeki türevini bulunuz.

b. f fonksiyonunun P_0 noktasında en hızlı arttığı ve en hızlı azaldığı yönleri ve bu yönlerdeki değişim hızlarını bulunuz.

$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ bir pürüzsüz C eğrisi ve $w = f(\mathbf{r}(t))$ bu C eğrisi boyunca hesaplanan bir skaler fonksiyon olsun. $\frac{dw}{dt}$ değerini bir gradyan ve yönlü türev cinsinden yazalım.

Alıştırmalar ve Problemler

1.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y \ln(10-x)}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

olarak verilsin. $f(x,y)$ fonksiyonunun tanım kümesini ve $f(x,y)$ fonksiyonunun sürekli olduğu tüm noktaların kümesini bulunuz.

2.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2 y + y^3}{x^4+2y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

a. $(x,y) \to (0,0)$ iken $f(x,y)$ limitinin mevcut olmadığını gösteriniz.

b. Varsa, $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ değerlerini hesaplayınız.

c. $f_y(x,y)$ türevini $f(x,y)$ gibi parçalı tanımlı bir fonksiyon olarak yazınız.

ertansinansahin.com

3. $u = x^2 - y^2$ ve $v = 2xy$ olmak üzere

$$w = f(u, v) = f(x^2 - y^2, 2xy)$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyon veriliyor. f fonksiyonunun ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olduğu biliniyor.

a. w_x ve w_y türevlerini f_u ve f_v cinsinden bulunuz.

b. w_{xx} ikinci mertebeden kısmi türevini f_{uu}, f_{uv} ve f_{vv} cinsinden yazınız.

4. $z = z(x, y)$ diferansiyellenebilir fonksiyonu, aşağıdaki denklemle örtük olarak tanımlanmıştır:

$$z^3 + xy + \ln(z + 1) + y^2 = 6.$$

$(x, y) = (1, 2)$ noktasında $z = 0$ olduğu bilinmektedir.

a. $z(x, y)$ fonksiyonunun $(1, 2)$ noktasındaki gradyan vektörünü, yani $\nabla z(1, 2)$ değerini bulunuz.

b. $z(x, y)$ fonksiyonunun $(1, 2)$ noktasında en hızlı arttığı yönü ve bu noktadaki maksimum artış hızını bulunuz.

ertansinansahin.com

Cevaplar

Örnek sorular

1 a. $D = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{4} + y^2 < 1\}$

b. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ elipsinin iç bölgesi, sınır dahil değildir.

2 Seviye eğrileri: $x^2 + y^2 = 144$ (yarıçap 12), $x^2 + y^2 = 100$ (yarıçap 10) ve $x^2 + y^2 = 36$ (yarıçap 6) çemberleridir.

3 a. $\frac{4}{9}$ b. 5 c. 0 d. 32

4 $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

5 Videoya gidiniz.

6 Videoya gidiniz.

7 Videoya gidiniz.

8 a. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2 + 8y$

b. $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,-1)} = 20, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,-1)} = -16$

9 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y - \sin z}{x^2 e^z + y\cos z}$

10 $\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 z^2 \sin\left(x^3 + 2y\right)$

11 a. 1/2 b. 0

c. Videoya gidiniz.

d. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ ve $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

12 a. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin y + y^2 e^x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2\cos y + 2ye^x$

b. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\sin y + y^2 e^x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2\sin y + 2e^x$

c. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x\cos y + 2ye^x$

d. $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 2\cos y + 2ye^x, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -x^2\cos y$

13 a. $\frac{\partial w}{\partial r} = 3r^2\cos^2\theta\sin\theta + 6r^5$

b. $\frac{\partial w}{\partial \theta} = r^3\cos^3\theta - 2r^3\cos\theta\sin^2\theta$

14 $\frac{dy}{dx} = \frac{ye^{xy} + 2x}{3y^2 - xe^{xy}}$

15 $\frac{12}{5}$

16 a. $\mathbf{u} = \frac{4}{\sqrt{17}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{17}}\mathbf{j}$ b. $\mathbf{u} = -\frac{4}{\sqrt{17}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{17}}\mathbf{j}$

c. $\mathbf{n} = \pm\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{17}}\mathbf{j}\right)$

17 $y = \frac{2}{3}x + 4$

18 a. $D_{\mathbf{u}} f(P_0) = \frac{4}{7}$

b. En hızlı artış: $\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$ yönünde $2\sqrt{5}$; en hızlı azalış: $-\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$ yönünde $-2\sqrt{5}$

Alıştırmalar ve problemler

1 Tanım Kümesi: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 10\}$

Süreklilik Kümesi: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 10\} \setminus \{(0,0)\}$

2 a. $y = mx^2$ için limit $\frac{2m}{1+2m^2}$, m'ye bağlı, limit yoktur.

b. $f_x(0,0) = 0 \quad f_y(0,0) = \frac{1}{2}$

c. $f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^6 + 3x^4y^2 - 4x^2y^2 + 2y^4}{(x^4 + 2y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ \frac{1}{2}, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

3 a. $w_x = 2xf_u + 2yf_v, \quad w_y = -2yf_u + 2xf_v$

b. $w_{xx} = 2f_u + 4x^2 f_{uu} + 8xyf_{uv} + 4y^2 f_{vv}$

4 a. $\nabla z(1,2) = -2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

b. Yön: $-\frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{i} - \frac{5}{\sqrt{29}}\mathbf{j}$, Artış hızı: $\sqrt{29}$

ertansinansahin.com

12. ÜNİTE
KISMİ TÜREVLER - 2

video izle

Teğet Düzlemler ve Diferansiyeller

TANIM: $f(x,y,z) = c$ seviye yüzeyinin P_0 noktasında, $\nabla f(P_0) \neq \mathbf{0}$ olmak üzere, teğet düzlem gradyan vektörüne dik; normal doğru ise gradyan vektörüne paraleldir. Başka bir deyişle, gradyan vektörü yüzeyin o noktadaki bir normal vektörüdür.

$ax + by + cz + d = 0$ şeklinde tanımlanan bir düzlemin normal vektörünü gradyan vektörünü kullanarak nasıl bulduğumuzu inceleyelim.

ÖRNEK 1: $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 12 = 0$ seviye yüzeyine $P(1,2,1)$ noktasındaki teğet düzlemin ve normal doğrunun denklemini bulunuz.

ÖRNEK 2: $f(x,y) = e^x \sin y + x^2 y$ yüzeyi üzerindeki $P(0,\pi,0)$ noktasında yüzeye teğet olan düzlemin denklemini bulunuz.

ÖRNEK 3: $x^2 + y^2 = 5$ silindiri ile $x + y + z = 1$ düzlemi bir E elipsi boyunca kesişmektedir. Bu elips üzerindeki $P(1,2,-2)$ noktasında elipse teğet olan doğrunun parametrik denklemlerini bulunuz.

ertansinansahin.com

Diferansiyellenebilir bir f fonksiyonunun değerinin, P_0 noktasından **u** yönünde ds kadar küçük bir mesafe ilerlediğimizde nasıl değiştiğini inceleyelim.

ÖRNEK 4: $f(x,y,z) = x^2e^{yz} + \ln(x+z)$ fonksiyonunun değeri, $P_0(1,0,0)$ noktasından $P_1(3,-2,1)$ noktasına doğru 0.2 birim hareket edildiğinde yaklaşık olarak ne kadar değişir?

ertansinansahin.com

TANIM: $f(x,y)$ fonksiyonu (x_0,y_0) noktasında diferansiyellenebilir ise, bu noktaya yakın yerlerde f fonksiyonu bir doğrusal fonksiyonla yaklaşık olarak temsil edilebilir. Bu doğrusal fonksiyon

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

olup, f fonksiyonunun (x_0,y_0) noktasındaki doğrusallaştırması olarak adlandırılır. Buna göre, (x,y) noktası (x_0,y_0) noktasına yakın olduğunda

$$f(x,y) \approx L(x,y)$$

yazılır. Bu ifade, f fonksiyonunun söz konusu noktadaki doğrusal yaklaşımını verir.

ÖRNEK 5: $f(x,y) = 2x^2 + 3xy - y^2 + 5$ fonksiyonunun $(1,2)$ noktasındaki doğrusallaştırmasını $L(x,y)$ bulunuz.

Diferansiyeller

TANIM: (x_0,y_0) noktasından, bu noktaya yakın $(x_0 + dx,\ \ y_0 + dy)$ noktasına geçildiğinde, f fonksiyonundaki değişimin doğrusal kısmı

$$df = f_x(x_0,y_0)\,dx + f_y(x_0,y_0)\,dy$$

şeklindedir. Bu ifadeye, f fonksiyonunun toplam diferansiyeli denir.

ÖRNEK 6: Dik dairesel koni şeklindeki bir metal parçası, taban yarıçapı $r = 5$ cm ve yüksekliği $h = 10$ cm olacak şekilde tasarlanmıştır. Ancak üretim hatası nedeniyle taban yarıçapında $dr = 0.1$ cm artış, yükseklikte ise $dh = -0.2$ cm değişim meydana gelmiştir. Diferansiyelleri kullanarak koninin hacmindeki yaklaşık mutlak değişimi hesaplayınız.

Ekstremum Değerler ve Eyer Noktaları

Bir $f(x, y)$ fonksiyonu için yerel minimum ve maksimum ile mutlak minimum ve maksimum kavramlarını tartışalım. Eyer noktalarını inceleyelim.

TANIM: $f(x, y)$ fonksiyonunun tanım kümesinin bir iç noktası olan (x_0, y_0) için, $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ ise veya f_x, f_y türevlerinden en az biri bu noktada tanımlı değilse, (x_0, y_0) noktasına kritik nokta denir.

Bir kritik noktanın eyer noktası olması için gereken şartı tartışalım.

Yerel ekstremum noktalarını nasıl elde edeceğimizi inceleyelim.

TEOREM: $f(x, y)$ fonksiyonunun ve birinci ile ikinci mertebeden kısmi türevlerinin, (a, b) merkezli bir disk boyunca sürekli olduğunu varsayalım. Ayrıca $f_x(a, b) = 0$ ve $f_y(a, b) = 0$ olsun. f fonksiyonunun (a, b) noktasındaki Hessian matrisi

$$H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Bu matrisin determinantını $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}{}^2$ ile gösterelim. Buna göre, (a, b) noktasındaki kritik noktanın türü şu şekilde belirlenir:

- Eğer $D > 0$ ve $f_{xx} < 0$ ise, f fonksiyonu (a, b) noktasında bir yerel maksimuma sahiptir.
- Eğer $D > 0$ ve $f_{xx} > 0$ ise, f fonksiyonu (a, b) noktasında bir yerel minimuma sahiptir.
- Eğer $D < 0$ ise, f fonksiyonu (a, b) noktasında bir eyer noktasına sahiptir.
- Eğer $D = 0$ ise, test sonuçsuzdur.

ÖRNEK 7: $f(x, y) = 4xy - x^4 - 2y^2$ fonksiyonunun tüm yerel ekstremum değerlerini ve eyer noktalarını bulunuz.

ertansinansahin.com

Kapalı ve sınırlı bir bölgede sürekli bir $f(x,y)$ fonksiyonunun mutlak ekstremumlarını bulmak için:

I. Bölgenin içindeki kritik noktaları bulun ve f'yi hesaplayın.

II. Sınır üzerindeki aday noktaları bulun ve f'yi hesaplayın.

III. Elde edilen değerleri karşılaştırın; en büyük değer mutlak maksimum, en küçük değer mutlak minimumdur.

ÖRNEK 8: $f(x,y)=x^2+2y^2-4x-4y+5$ fonksiyonunun, $x=0$, $y=0$ ve $x+y=4$ doğruları tarafından sınırlandırılan kapalı üçgensel bölge üzerindeki mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

ÖRNEK 9: Bir mühendislik firması, tabanı dikdörtgen şeklinde olan ve bir köşesinde yer tasarrufu sağlamak amacıyla özel bir kısıta sahip su deposu tasarlamaktadır. Deponun uzunluğu ile taban çevresinin toplamı en fazla 360 cm olabilmektedir. Bu kısıt dahilinde, deponun hacmini maksimize edecek boyutları ve bu maksimum hacmi bulunuz.

ertansinansahin.com

Lagrange Çarpanları

Bir örnek üzerinden Lagrange çarpanları yöntemini inceleyelim.

ÖRNEK 10: $f(x,y)=3x+4y$ fonksiyonunun $x^2+y^2=1$ çemberi üzerindeki maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

ÖRNEK 11: $x^2+y^2+z^2=9$ küresi üzerinde bulunan ve $(4,2,-4)$ noktasına en yakın ve en uzak olan noktaları bulunuz.

ÖRNEK 12: Üstü açık dikdörtgenler prizması şeklindeki bir kutu, toplam 12 m^2 karton kullanılarak imal edilecektir. Bu kutunun hacminin alabileceği maksimum değeri bulunuz.

Bir örnek üzerinden Lagrange çarpanları yöntemini birden fazla kısıtlama olması durumu için inceleyelim.

ÖRNEK 13: $f(x,y,z)=z$ fonksiyonunun $x^2+y^2=1$ silindiri ve $x+y+z=5$ düzleminin kesişimi üzerindeki maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

ertansinansahin.com

Alıştırmalar ve Problemler

1. $z=2x^2+y^2-3y$ denklemiyle verilen yüzeyin $(2,1,6)$ noktasında

a. teğet düzleminin,

b. normal doğrusunun

denklemlerini bulunuz.

2. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 1$ fonksiyonunun, köşeleri $A(0,0)$, $B(3,0)$ ve $C(0,3)$ olan üçgensel R bölgesi üzerindeki mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

a. Fonksiyonun kritik noktalarını belirleyiniz.

b. Bölgenin sınırları üzerindeki ekstremum adaylarını bulunuz.

c. Fonksiyonun bu bölge üzerindeki mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini belirleyiniz.

3. $x^2 + 4yz = 8$ yüzeyi üzerinde bulunan ve orijine en yakın olan noktaları bulunuz.

ertansinansahin.com

Cevaplar

Örnek sorular

1	Teğet düzlemi: $x+4y+3z=12$ Normal doğru: $x=1+t,\quad y=2+4t,\quad z=1+3t$
2	$y+z=\pi$
3	$x=1+2t,\quad y=2-t,\quad z=-2-t$
4	$\Delta f \approx df = \frac{7}{15}$ birim
5	$L(x,y)=10x-y+1$
6	$dV=\frac{5}{3}\pi$ cm^3
7	Yerel maksimum: $(1,1)$ ve $(-1,-1)$ Eyer noktası: $(0,0)$
8	Mutlak maksimum: 21, mutlak minimum: -1
9	$x=120$ cm, $y=60$ cm, $z=60$ cm $V=432\,000$ cm^3
10	Maksimum: 5 Minimum: -5
11	En yakın: $(2,1,-2)$, En uzak: $(-2,-1,2)$
12	$V=4.0$ m^3
13	Maksimum: $5+\sqrt{2}$, Minimum: $5-\sqrt{2}$

Alıştırmalar ve problemler

1	a. $-8x+y+z+9=0$ b. $x=2-8t,\quad y=1+t,\quad z=6+t$
2	a. $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ b. $(1,0),(0,1),\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right),(0,0),(3,0),(0,3)$ c. Mutlak maksimum: 4, Mutlak minimum: $-\frac{1}{3}$
3	$(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$ ve $(0,-\sqrt{2},-\sqrt{2})$

ertansinansahin.com

13. ÜNİTE
KATLI İNTEGRALLER

video izle

Dikdörtgensel Bölgeler Üzerinde İki Katlı ve İterasyonlu İntegraller

İki katlı integralin hacimle olan ilişkisini inceleyelim.

TEOREM: $f(x,y)$ fonksiyonu $R: a \le x \le b, c \le y \le d$ dikdörtgensel bölgesi boyunca sürekli ise, o halde:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

ÖRNEK 1: xy-düzleminde $R: 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1$ dikdörtgeni tarafından sınırlanan bölgenin üzerinde ve $z = 4 + x^2 + 2y^2$ eliptik paraboloidinin altında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

ertansinansahin.com

Dikdörtgensel Olmayan Bölgelerde İki Katlı İntegraller

Bir örnek üzerinden dikdörtgensel olmayan bölgelerde iki katlı integrallerin nasıl alınacağını inceleyelim.

ÖRNEK 2: xy-düzleminde, $x = 0$, $y = 2$ ve $y = x$ doğruları ile sınırlanan üçgensel bölge üzerinde yer alan ve üst yüzeyi $z = f(x,y) = 3x + y$ düzlemi olan katı cismin hacmini bulunuz.

ÖRNEK 3: Aşağıdaki çift katlı integrali integrasyon sırasını değiştirerek hesaplayınız:

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy$$

ÖRNEK 4: D bölgesi, $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ ve $x + y = 2$ eğrileriyle sınırlanan bölge olsun. Burada $\iint_D f(x,y)\, dA$ integrali sınırlarıyla yazılacaktır.

a. İntegrali $dx\, dy$ sırasıyla yazınız.

b. İntegrali $dy\, dx$ sırasıyla yazınız.

$f(x,y)$ ve $g(x,y)$ fonksiyonları sınırlı bir R bölgesi üzerinde sürekli ise, aşağıdaki özellikler geçerlidir:

- Herhangi bir c sayısı için:

$$\iint_R cf(x,y)\, dA = c \iint_R f(x,y)\, dA$$

- Toplam ve fark kuralı:

$$\iint_R \big(f(x,y) \pm g(x,y)\big)\, dA = \iint_R f(x,y)\, dA \pm \iint_R g(x,y)\, dA$$

- Eğer R üzerinde $f(x,y) \geq 0$ ise:

$$\iint_R f(x,y)\, dA \geq 0$$

- Eğer R üzerinde $f(x,y) \geq g(x,y)$ ise:

$$\iint_R f(x,y)\, dA \geq \iint_R g(x,y)\, dA$$

- Eğer R bölgesi, birbiriyle örtüşmeyen R_1 ve R_2 bölgelerinin birleşimi ise:

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \iint_{R_1} f(x,y)\, dA + \iint_{R_2} f(x,y)\, dA$$

ertansinansahin.com

ÖRNEK 5: Birinci oktantta yer alan ve $z = 1 - y^2 - x$ yüzeyi tarafından sınırlanan katı cismin hacmini bulunuz.

İki Katlı İntegralle Alan Hesabı

İki katlı integralle alan hesabının nasıl yapılacağını inceleyelim.

ÖRNEK 6: Birinci bölgede $y = \sqrt{x}$ ve $y = x^3$ eğrileri tarafından sınırlanan R bölgesinin alanını çift katlı integral kullanarak hesaplamak istenmektedir. Bu bölgenin alanını veren integralleri hesaplamadan;

a. İntegral sırası $dy\,dx$ olacak şekilde,

b. İntegral sırası $dx\,dy$ olacak şekilde

iki farklı biçimde ifade ediniz.

Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun bir R bölgesindeki ortalama değerini iki katlı integrali kullanarak ifade edelim.

Kutupsal Koordinatlarda İki Katlı İntegraller

Kutupsal koordinatlarda bir R bölgesinin alanının iki katlı integralle nasıl ifade edildiğini inceleyelim.

ÖRNEK 7: xy-düzleminde, $r = 2\cos\theta$ çemberi içerisinde kalan ve $r = 1$ çemberinin dışında bulunan bölgeyi R olarak tanımlayalım. R bölgesinin alanını hesaplayınız.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 8: $\iint_R e^{x^2+y^2}\,dy\,dx$ integralini hesaplayınız. Burada R, x-ekseni ile $y=\sqrt{1-x^2}$ eğrisi arasında kalan yarım daire bölgesidir.

ÖRNEK 9: $z=x^2+y^2+4$ yüzeyi ile xy-düzlemi arasında kalan katı cismin, tabanı xy-düzleminde $x^2+y^2=1$ ve $x^2+y^2=9$ çemberleri arasında kalan halka bölgesi üzerindeki kısmının hacmini bulunuz.

ÖRNEK 10: Kutupsal integral yöntemini kullanarak; $x^2+y^2=4$ çemberi tarafından sınırlanan, $y=1$ doğrusunun üstünde ve $y=x$ doğrusunun altında kalan R bölgesinin alanını bulunuz.

ertansinansahin.com

Kartezyen Koordinatlarda Üç Katlı İntegraller

Üç katlı integralle hacim hesabının nasıl yapılacağını inceleyelim.

ÖRNEK 11: S, merkezi orijinde ve yarıçapı 4 olan küre olsun. D ise bu kürenin içinde kalan ve $z = 2$ düzleminin üzerinde bulunan katı bölgeyi göstersin. D bölgesi üzerinde tanımlı bir $F(x, y, z)$ fonksiyonu için

$$\iiint_D F(x, y, z)\, dV$$

integralini Kartezyen koordinatlarda $dz\, dy\, dx$ sırasına göre kurunuz.

ÖRNEK 12: Köşeleri $O(0, 0, 0)$, $A(2, 1, 0)$, $B(0, 1, 0)$ ve $C(0, 1, 2)$ noktaları olan D dörtyüzlüsünün hacmini, üç katlı integral kullanarak ve integrasyon sırasını $dz\, dy\, dx$ alarak yazınız.

ÖRNEK 13: $z = x^2 + 2y^2$ paraboloidi tarafından alttan ve $z = 10 - x^2 - y^2$ paraboloidi tarafından üstten sınırlanan D bölgesinin hacmini veren üç katlı integrali $dz\, dy\, dx$ düzeninde yazınız.

ertansinansahin.com

Uygulamalar

Katlı integralleri kullanarak katı cisimlerin kütle hesabının nasıl yapılacağını inceleyelim. Cismin kütle merkezinin nasıl bulunacağını yazalım.

ÖRNEK 14: xy-düzleminde $x^2+y^2 \leq 9$ diski üzerinde yükselen ve üstten $z = 9-x^2-y^2$ paraboloidi ile sınırlanan katı cismin yoğunluğu $\delta(x,y,z) = z$ olarak verilmektedir.

a. Bu katı cismin toplam kütlesini veren üç katlı integrali kartezyen koordinatlarda yazınız.

b. Katı cismin kütle merkezinin x, y ve z koordinatlarını veren integralleri kartezyen koordinatlarda yazınız.

Silindirik ve Küresel Koordinatlarda Üç Katlı İntegraller

Silindirik koordinatlar

- Silindirik koordinatların tanımını yapalım.
- Silindirik koordinatlar için gerekli denklemleri yazalım.
- $r = 2$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ve $z = 1$ denklemlerinin ifade ettiği yüzeyleri inceleyelim.

Silindirik koordinatlarda üç katlı integrallerin nasıl alınacağını gösterelim.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 15: D bölgesi; üstten $z = 4-x^2-y^2$ paraboloidi, alttan $z = 0$ düzlemi ve yandan $x^2+y^2 = 2x$ silindiri ile sınırlandırılmıştır. Silindirik koordinatları kullanarak, bu bölge üzerinde tanımlı genel bir $f(r,\theta,z)$ fonksiyonunun üç katlı integralinin sınırlarını belirleyiniz ve integrali yazınız.

ÖRNEK 16: $z = 4 - x^2 - y^2$ paraboloidi ile xy-düzlemi arasında kalan bölgenin hacmini silindirik koordinatları kullanarak hesaplayınız.

Küresel koordinatlar

- Küresel koordinatların tanımını yapalım.
- Küresel koordinatlar için gerekli denklemleri yazalım.
- $\rho = 2$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ denklemlerinin ifade ettiği yüzeyleri inceleyelim.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 17: $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ küresinin denklemini küresel koordinatlarda (ρ, ϕ, θ) ifade ediniz ve bu yüzeyin merkezinin Kartezyen koordinatlarını belirleyiniz.

Küresel koordinatlarda üç katlı integrallerin nasıl alınacağını gösterelim.

ÖRNEK 18: Küresel koordinat sistemini kullanarak, a yarıçaplı bir kürenin hacmini üç katlı integral yardımıyla hesaplayınız.

ÖRNEK 19: Üstten $\rho = 2$ küresi, alttan ise $\phi = \pi/6$ konisi ile sınırlandırılmış dondurma külahı şeklindeki D bölgesinin hacmini veren integrali küresel koordinatlar yardımıyla yazınız.

Çok Katlı İntegrallerde Değişken Dönüşümü

İki katlı integrallerde bölgeyi ve değişkenleri dönüştürdüğümüzde ne olacağını inceleyelim. Jakobi determinantının tanımını yapalım.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 20: Kutupsal koordinat dönüşümü $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ için Jakobi determinantını bulunuz ve bunu kullanarak $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ Kartezyen integralini kutupsal integral olarak ifade ediniz.

ÖRNEK 21: xy-düzleminde R bölgesi $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{4}{x}$, $y = x^2$ ve $y = 4x^2$ eğrileri tarafından sınırlanmıştır. Bu bölgenin alanını hesaplayınız.

ÖRNEK 22: R bölgesi, köşeleri $(1,0),(2,0),(0,1)$ ve $(0,2)$ noktalarında bulunan yamuksal bölge olduğuna göre,

$$\iint_R \exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dA$$

integralini hesaplamak için $u = x - y$ ve $v = x + y$ dönüşümlerini kullanınız.

a. Dönüşümün Jakobi matrisinin determinantının mutlak değerini, yani $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ ifadesini bulunuz.

b. uv-düzlemindeki yeni integrasyon bölgesini belirleyiniz ve integrali hesaplayınız.

Üç boyuttaki $x = \rho \sin\phi \cos\theta$, $y = \rho \sin\phi \sin\theta$ ve $z = \rho \cos\phi$ dönüşümü için Jakobi matrisini inceleyelim:

$$J(\rho,\phi,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho^2 \sin\phi$$

ÖRNEK 23: Aşağıdaki üçlü integrali $u = x + y + z$, $v = x - y$, $w = x$ dönüşümlerini kullanarak uvw-uzayında uygun bir bölge üzerinden yazınız:

$$\int_0^2 \int_0^x \int_0^{2-x} \left(\frac{x+y+z}{2}\right) dz\, dy\, dx$$

ertansinansahin.com

Alıştırmalar ve Problemler

1. Aşağıda, iki farklı bölge üzerinde tanımlanmış iki katlı integrallerin toplamı verilmiştir:

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\, dy\, dx + \int_1^3 \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)\, dy\, dx.$$

Bu iki integralin tanımladığı bölgeleri xy-düzleminde birleştiriniz. Elde edilen birleşik bölge üzerinde integrasyon sırasını değiştirerek toplam integrali tek bir iki katlı integral olarak yazınız.

2. Aşağıdaki iki katlı integrali hesaplayınız:

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_x^{\sqrt{\pi/2}} \cos\left(y^2\right) dy\, dx$$

3. $y = x$ doğrusu ile $y = x^2$ parabolü arasında kalan bölge R olsun. R bölgesi üzerindeki noktaların koordinatlarının çarpımının ortalama değerini hesaplayınız.

4. Silindirik koordinatlarda verilen

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{4-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta, \quad r \geq 0$$

integralini kullanarak aşağıdaki işlemleri gerçekleştiriniz:

a. İntegrali $dz\, dy\, dx$ sırasıyla Kartezyen koordinatlara dönüştürünüz.

b. İntegrali küresel koordinatlara dönüştürünüz.

c. İntegrallerden birini hesaplayarak sonucu bulunuz.

ertansinansahin.com

5. R, xy-düzleminin birinci bölgesinde $xy=1, xy=4$ eğrileri ve $y=x, y=4x$ doğruları tarafından sınırlanan kapalı bölge olsun. Buna göre aşağıdaki iki katlı integrali hesaplayınız:

$$\iint_R y^2\,dA$$

Cevaplar

Örnek sorular

1	$V=12$
2	$V=\frac{20}{3}$
3	$\frac{1}{2}(e-1)$
4	a. $\int_0^1\int_{y^2}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$ b. $\int_0^1\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx+\int_1^2\int_0^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$
5	$V=\frac{4}{15}$
6	a. $A=\int_0^1\int_{x^3}^{\sqrt{x}}\,dy\,dx$ b. $A=\int_0^1\int_{y^2}^{y^{1/3}}\,dx\,dy$
7	$A=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$
8	$\frac{\pi(e-1)}{2}$
9	$V=72\pi$
10	$A=\frac{\pi}{6}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}$
11	$\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{12-x^2}}^{\sqrt{12-x^2}}\int_2^{\sqrt{16-x^2-y^2}} F(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$
12	$V=\int_0^2\int_{x/2}^1\int_0^{2y-x}\,dz\,dy\,dx$
13	$V=\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\int_{-\sqrt{(10-2x^2)/3}}^{\sqrt{(10-2x^2)/3}}\int_{x^2+2y^2}^{10-x^2-y^2}\,dz\,dy\,dx$
14	a. $M=\int_{-3}^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{9-x^2-y^2} z\,dz\,dy\,dx$ b. $\bar{x}=\frac{1}{M}\int_{-3}^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{9-x^2-y^2} xz\,dz\,dy\,dx,$ $\bar{y}=\frac{1}{M}\int_{-3}^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{9-x^2-y^2} yz\,dz\,dy\,dx,$ $\bar{z}=\frac{1}{M}\int_{-3}^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{9-x^2-y^2} z^2\,dz\,dy\,dx$
15	$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{4-r^2} f(r,\theta,z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$
16	$V=8\pi$
17	$\rho=4\cos\phi$ Merkez: $(0,0,2)$
18	$V=\frac{4}{3}\pi a^3$
19	$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^2 \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$
20	Jakobi determinantı: r İntegral: $\iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr\,d\theta$
21	$\ln(4)$
22	a. $\left\lvert\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\rvert=\frac{1}{2}$ b. $\frac{3}{4}(e-e^{-1})$
23	$\int_0^2\int_0^w\int_{2w-v}^{2+w-v}\frac{u}{2}\,du\,dv\,dw$

Alıştırmalar ve problemler

1	$\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,dx\,dy$
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{4}$
4	a. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dz\,dy\,dx$ b. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^2 \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$ c. $\frac{8\pi}{3}(2-\sqrt{2})$
5	$\frac{45}{4}$

ertansinansahin.com

14. ÜNİTE
İNTEGRALLER VE VEKTÖR ALANLARI

video izle

Skaler Fonksiyonların Eğrisel İntegralleri

Bir eğri üzerindeki skaler bir fonksiyonun integralinin ne anlama geldiğini tartışalım ve bu integralin nasıl alındığını inceleyelim.

ÖRNEK 1: $f(x,y,z) = x + y - 3z^2$ fonksiyonunu, orijini $(1,2,1)$ noktasına bağlayan C doğru parçası boyunca integre ediniz.

ertansinansahin.com

Bir örnek üzerinden eğrisel integrallerin toplanabilirliğini gösterelim.

ÖRNEK 2: $f(x,y,z) = x + y + z$ fonksiyonunun, $C = C_1 \cup C_2$ yolu üzerindeki integralini hesaplayınız. C_1 yolu $(0,0,0)$ noktasından $(1,0,0)$ noktasına giden doğru parçası, C_2 yolu ise $(1,0,0)$ noktasından $(1,1,1)$ noktasına giden doğru parçasıdır.

Bir örnek üzerinden tel şeklindeki bir cismin kütlesinin nasıl hesaplanacağını görelim.

ÖRNEK 3: İnce bir metal tel, $x^2 + y^2 = 4$ çemberinin $y \geq 0$ olan üst yarısı boyunca xy-düzlemine yerleştirilmiştir. Telin üzerindeki bir (x,y) noktasındaki doğrusal yoğunluk $\delta(x,y) = 3 - y$ fonksiyonu ile verilmektedir.

a. Telin toplam kütlesini bulunuz.

b. Telin kütle merkezinin koordinatlarını veren integral ifadelerini yazınız.

Vektör Alanları ve Eğrisel İntegralleri

- Vektör alanı kavramının ne olduğunu inceleyelim.
- Bir $\mathbf{r}(t)$ eğrisi üzerinde tanımlanabilen $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{N}$ vektörlerini inceleyelim.
- Bir $f(x,y,z)$ skaler fonksiyonunun değişim oranını gösteren gradyan alanını inceleyelim.

TANIM: C eğrisi, $a \le t \le b$ olmak üzere $\mathbf{r}(t)$ konum vektörüyle parametrize edilmiş düzgün bir eğri olsun. $\mathbf{F}$, C boyunca tanımlı ve bileşenleri sürekli olan bir vektör alanı olsun. Bu durumda $\mathbf{F}$ vektör alanının C eğrisi boyunca çizgi integrali

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_C \left(\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)ds = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathbf{T}$, C eğrisinin birim teğet vektörünü; s ise yay uzunluğu parametresini göstermektedir.

Aşağıdaki örneği çözdükten sonra bir kuvvet alanı tarafından yapılan işi ve bir hız alanı için akış integrali ve dolaşım kavramlarını tartışalım.

ÖRNEK 4: $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ vektör alanının, $0 \le t \le 1$ aralığında $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ parametrik denklemi ile verilen C eğrisi boyunca çizgi integralini $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ hesaplayınız.

$\mathbf{F}(x,y,z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ vektör alanı için

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

eşitliğini gösterelim.

TANIM: C, düzlemde tanımlı sürekli bir $\mathbf{F} = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$ vektör alanının tanım bölgesinde yer alan, düzgün ve basit kapalı bir eğri olsun. $\mathbf{n}$, C eğrisi üzerindeki dışa doğru yönelmiş birim normal vektör ise, $\mathbf{F}$ vektör alanının C eğrisi boyunca dışa doğru akısı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\text{Akı} = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$$

Aynı akıyı $\mathbf{n}$ vektörünü farklı bir şekilde ifade ederek yeniden yazalım ve aşağıdaki sonucu elde edelim:

$$\text{Akı} = \oint_C M\,dy - N\,dx$$

ertansinansahin.com

ÖRNEK 5: $\mathbf{F} = (2x + y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$ vektör alanı veriliyor. xy-düzleminde pozitif yönde bir kez taranan $x^2 + y^2 = 4$ çemberi üzerinden dışarı doğru olan akıyı bulunuz.

Yoldan Bağımsızlık, Korunumlu Alanlar ve Potansiyel Fonksiyonlar

- Yoldan bağımsızlık kavramını tanımlayalım.
- Korunumlu alan kavramını tanımlayalım.
- Potansiyel fonksiyon kavramını tanımlayalım.

Kalkülüsün temel teoremi formülünün vektör kalkülüsteki karşılığı yazalım. Çizgi integralleri için temel teoremi yazalım.

ÖRNEK 6: $\mathbf{F} = \nabla f$ kuvvet alanı,

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

potansiyel fonksiyonunun gradyanı olarak veriliyor. Bir nesne, $(1, 0, 0)$ noktasından başlayıp $(1, 1, 1)$ noktasına uğrayan ve $(2, 2, 1)$ noktasında biten, orijinden geçmeyen pürüzsüz bir C eğrisi boyunca hareket ediyor. $\mathbf{F}$ kuvvet alanının bu hareket sırasında yaptığı işi bulunuz.

TEOREM: $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ vektör alanının bileşenleri, uzayda açık ve bağlantılı bir D bölgesinde sürekli olsun. $\mathbf{F}$ alanının korunumlu olması, D bölgesinde tanımlı türevlenebilir bir f fonksiyonu için

$$\mathbf{F} = \nabla f$$

yazılabilmesi anlamına gelir. Bu durumda f fonksiyonuna $\mathbf{F}$ alanının potansiyel fonksiyonu denir.

ertansinansahin.com

Korunumlu alanların kapalı yol özelliğini inceleyelim.

$\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ vektör alanı, açık ve basit bağlantılı bir bölgede tanımlı olsun. Ayrıca M, N ve P bileşenlerinin sürekli birinci mertebeden kısmi türevlere sahip olduğunu varsayalım.

Bu koşullar altında $\mathbf{F}$ alanının korunumlu olması için gereken koşulu yazalım.

ÖRNEK 7:
$\mathbf{F} = (e^x \sin y + yz)\mathbf{i} + (e^x \cos y + xz + z)\mathbf{j} + (xy + y)\mathbf{k}$ vektör alanının doğal tanım kümesi üzerinde korunumlu olduğunu gösteriniz ve bu alan için bir potansiyel fonksiyonu bulunuz.

Tam diferansiyel form kavramını inceleyelim.

ÖRNEK 8: Aşağıdaki vektör alanını göz önüne alalım:

$$\mathbf{F} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)\mathbf{j} + (z + 1)\mathbf{k}$$

Bu vektör alanı için aşağıdaki soruları yanıtlayınız:

a. Vektör alanının korunumlu alanlar için bileşen testini sağladığını gösteriniz.

b. $\mathbf{F}$ vektör alanının doğal tanım kümesini belirleyiniz ve bu kümenin neden "basit bağlantılı" olmadığını açıklayınız.

c. xy-düzlemindeki birim çember boyunca $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ integralini hesaplayınız. Bu sonuç ışığında vektör alanının korunumlu olup olmadığını yorumlayınız.

ertansinansahin.com

ÖRNEK 9: $z\,dx + 2y\,dy + x\,dz$ ifadesinin tam bir diferansiyel form olduğunu gösteriniz ve $(1, 1, 1)$ noktasından $(3, 2, 2)$ noktasına kadar herhangi bir eğri boyunca aşağıdaki integrali hesaplayınız:

$$\int_{(1,1,1)}^{(3,2,2)} z\,dx + 2y\,dy + x\,dz$$

Düzlemde Green Teoremi

TANIM: Bir $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ vektör alanının (x, y) noktasındaki sirkülasyon yoğunluğu aşağıdaki skaler ifadedir:

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

Green teoreminin rotasyonel veya teğetsel formunu inceleyelim:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

ÖRNEK 10: $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - y)\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j}$ vektör alanı ve sınırları $C : \mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ olan birim disk bölgesi R için Green teoreminin rotasyonel formunu aşağıdaki integralleri hesaplayarak doğrulayınız:

a. $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ dolaşım integralini hesaplayınız.

b. $\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$ iki katlı integralini hesaplayınız.

TANIM: $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ vektör alanının (x, y) noktasındaki diverjansı aşağıda verilmiştir:

$$\text{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

ertansinansahin.com

Green teoreminin diverjans veya normal formunu inceleyelim:

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \oint_C M\,dy - N\,dx = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\,dy$$

ÖRNEK 11: $\mathbf{F}(x,y) = (x^2 - y)\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j}$ vektör alanı ve sınırları $C : \mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ olan birim disk bölgesi R için Green teoreminin diverjans formunu aşağıdaki integralleri hesaplayarak doğrulayınız:

a. $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$ akı integralini hesaplayınız.

b. $\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA$ iki katlı integralini hesaplayınız.

ÖRNEK 12: C eğrisi, köşeleri $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ ve $(0,1)$ olan birim karenin saatin tersi yönündeki sınırı olmak üzere, aşağıdaki eğrisel integrali hesaplayınız:

$$\oint_C (e^x + 3y^2)\,dx + (4x + \sin y)\,dy$$

Yüzeyler ve Alan

Bir örnek üzerinden yüzeylerin parametrizasyonunu anlayalım.

ÖRNEK 13: Aşağıda tanımlanan yüzeyler için uygun parametrizasyonları ve parametre aralıklarını bulunuz:

a. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisinin $0 \le z \le 1$ aralığında kalan kısmı.

b. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinin tamamı.

c. $x^2 + (y-2)^2 = 4$ silindirinin $0 \le z \le 5$ aralığında kalan kısmı.

ertansinansahin.com

$\mathbf{r}(u,v) = f(u,v)\mathbf{i} + g(u,v)\mathbf{j} + h(u,v)\mathbf{k}$ biçiminde tanımlanan pürüzsüz bir parametrik yüzeyin alanını $a \le u \le b$ ve $c \le v \le d$ için veren integrali nasıl elde edeceğimizi inceleyelim.

ÖRNEK 14: $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}$ parametrizasyonu ile verilen ve $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$ aralıklarında tanımlanan koninin yüzey alanını hesaplayınız.

xy-düzlemindeki bir R bölgesi üzerinde tanımlı $z = f(x,y)$ yüzeyinin yüzey alanı diferansiyeli $d\sigma$'yı elde edelim. Aynı şeyi bir de $F(x,y,z) = c$ yüzeyi için elde edelim.

ÖRNEK 15: $x^2 + y^2 - z = 0$ paraboloidinin, $z = 1$ düzleminin altında kalan parçasının yüzey alanını kartezyen koordinatlarda veren integrali yazınız.

ertansinansahin.com

Yüzey İntegralleri

Bir $G(x,y,z)$ fonksiyonunun S yüzeyi üzerindeki yüzey integralini, S yüzeyinin aşağıdaki tanımlanma biçimlerine göre yazalım:

- Parametrik olarak tanımlanan yüzeyler.
- $z = f(x,y)$ biçiminde açık olarak tanımlanan yüzeyler.
- $F(x,y,z) = c$ biçiminde örtük olarak tanımlanan yüzeyler.

ÖRNEK 16: S, birinci oktantta $x+y+z=1$ düzlemi üzerinde kalan üçgensel yüzey olsun. $G(x,y,z)=z$ fonksiyonunun S yüzeyi üzerindeki yüzey integralini aşağıdaki üç farklı yöntemle yazınız:

a) S yüzeyini parametrik olarak tanımlayarak.

b) S yüzeyini $z=f(x,y)$ biçiminde açık olarak yazarak.

c) S yüzeyini $F(x,y,z)=c$ biçiminde örtük olarak düşünerek.

ÖRNEK 17: $z=x^2+1$ silindiri üzerinde, xy-düzlemindeki $x\geq 0$, $y\geq 0$ ve $x+y\leq 1$ sınırlarıyla tanımlanan üçgensel R bölgesi üzerindeki S yüzeyini göz önüne alınız. Bu yüzey üzerinde $\iint_S \sqrt{y(1+4x^2)}\,d\sigma$ yüzey integralini hesaplamak için gerekli olan iki katlı integrali $dy\,dx$ sırasıyla kurunuz.

Vektör alanların yüzey integralleri

Yönlendirilebilir yüzey kavramını inceleyelim.

TANIM: $\mathbf{F}$, uzayda tanımlı bir vektör alanı olsun. S ise üzerinde seçilmiş birim normal vektör alanı $\mathbf{n}$ bulunan düzgün bir yüzey olsun. Bu durumda $\mathbf{F}$ vektör alanının S yüzeyi üzerindeki yüzey integrali aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$$

Bu integral, $\mathbf{F}$ vektör alanının S yüzeyinden geçen akısı olarak da adlandırılır.

ertansinansahin.com

Bir $\mathbf{F}$ vektörünün S yüzeyindeki akısını, S yüzeyinin aşağıdaki tanımlanma biçimlerine göre yazalım:

- Parametrik olarak tanımlanan yüzeyler.
- $g(x,y,z)=c$ biçiminde örtük olarak tanımlanan yüzeyler.
- $z=f(x,y)$ biçiminde açık olarak tanımlanan yüzeyler.

ÖRNEK 18: $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vektör alanı ve $z = 4 - x^2 - y^2$ paraboloidinin xy-düzleminin üstünde kalan parçası S olsun. S yüzeyi boyunca yukarı yönlü akıyı veren iki katlı integrali, x ve y değişkenleri cinsinden, sınırlarını belirleyerek yazınız.

Stokes Teoremi

Bir vektör alanının rotasyonelini tanımlayalım.

S yüzeyi, sınır eğrisi C olan parçalı düzgün ve yönlendirilmiş bir yüzey olsun. $\mathbf{F}$ vektör alanının C sınırı üzerindeki saat yönünün tersindeki sirkülasyonu için Stokes teoremini yazalım.

Stokes teoremini xy-düzleminde saat yönünün tersine yönlendirilmiş bir eğri için yeniden yazalım.

ÖRNEK 19: $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ vektör alanı ve üst yarı küre $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$ yüzeyi verilsin. Bu yüzeyin sınır eğrisi $C : x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ çemberi olup, yukarıdan bakıldığında saat yönünün tersine doğru yönlendirilmiştir. Stokes teoreminin geçerli olduğunu göstermek için eşitliğin iki tarafını da ayrı ayrı hesaplayınız.

a. C eğrisi üzerindeki sirkülasyon integralini hesaplayınız.

b. $\nabla \times \mathbf{F}$ rotasyonel integralini yüzey üzerinden hesaplayınız.

ertansinansahin.com

Stokes teoremi yardımıyla, bir noktadaki rotasyonel bileşenini nasıl yalnız bırakabileceğimizi ve sirkülasyon yoğunluğunu nasıl elde edeceğimizi gösterelim.

ÖRNEK 20: Bir akışkanın hız alanı, z-ekseni etrafında dönen ve aynı zamanda z yönünde yukarı doğru ivmelenen $\mathbf{F} = -2y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ vektör alanı ile verilmiştir.

a. $\nabla \times \mathbf{F}$ rotasyonelini bulunuz.

b. $\mathbf{F}$ vektör alanının, $z = 3$ düzleminde yer alan, merkezi $(0, 0, 3)$ ve yarıçapı ρ olan, yukarıdan bakıldığında saat yönünün tersine yönlendirilmiş C çemberi boyunca sirkülasyonunu Stokes teoremi ile hesaplayınız. Elde ettiğiniz sonucu sirkülasyon yoğunluğu ile ilişkilendiriniz.

ertansinansahin.com

Stokes teoremini üzerinde delikler bulunan yüzeyler için tartışalım.

$\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$ eşitliğini gösterelim. Bu eşitliğin korunumlu vektör alanları için ne anlama geldiğini ifade edelim.

Diverjans Teoremi

Bir vektör alanının diverjansını tanımlayalım.

Bileşenleri sürekli birinci mertebeden kısmi türevlere sahip bir vektör alanı $\mathbf{F}$ ve parçalı pürüzsüz, yönlendirilmiş kapalı bir yüzey S olsun. $\mathbf{F}$ vektör alanının, yüzeyin dışa doğru birim normal alanı $\mathbf{n}$ yönünde S üzerindeki akısı için diverjans teoremini yazalım.

ÖRNEK 21: $D : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ birim küresi, $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ise D bölgesini sınırlayan dışa doğru yönlendirilmiş küre yüzeyi olsun. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vektör alanı için diverjans teoremini aşağıdaki iki integrali hesaplayarak doğrulayınız.

a. Dışa doğru akıyı veren $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ yüzey integralini hesaplayınız.

b. $\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$ hacim integralini hesaplayınız.

$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ eşitliğini gösterelim. Bu eşitliğin diverjans teoremi açısından ne anlama geldiğini ifade edelim.

Parçalara ayrılmış bölgeler için diverjans teoremini tartışalım.

ertansinansahin.com

Orijinden dışarı doğru yönelen ve uzaklığın karesiyle ters orantılı olarak zayıflayan bir vektör alanı için diverjans teoremini inceleyelim. Bu incelemede iç yarıçapı b, dış yarıçapı a olan küresel kabuk bölgesini referans alacağız.

Burada elde ettiğimiz sonucu elektromanyetik teoride kullandığımız Gauss yasası ile kıyaslayalım.

D, kapalı ve yönlendirilmiş bir S yüzeyi ile sınırlandırılmış uzayda bir bölge olsun. Eğer $\mathbf{v}(x,y,z)$, D bölgesinden pürüzsüz bir şekilde akan bir akışkanın hız alanı, $\delta = \delta(t,x,y,z)$, t anında (x,y,z) noktasındaki akışkan yoğunluğu ve $\mathbf{F} = \delta\mathbf{v}$ olsun.

Hidrodinamiğin süreklilik denklemini diverjans teoremini yukarıda verilenleri kullanarak elde edelim.

ertansinansahin.com

İki boyutlu bir $\mathbf{F} = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$ vektör alanını, $\mathbf{k}$-bileşeni sıfır olan üç boyutlu bir alan olarak düşünelim. Bunu kullanarak

- Green teoreminin rotasyonel veya teğetsel formunu tekrar elde edelim.
- Green teoreminin diverjans veya normal formunu tekrar elde edelim.

> **NOT:** Bir bölge üzerindeki alana etki eden bir diferansiyel operatörün integrali, o bölgenin sınırı üzerindeki operatöre uygun alan bileşenlerinin toplamına eşittir.

Alıştırmalar ve Problemler

1. $\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ kuvvet alanı tarafından, $(1,0)$ noktasından $(-e^{2\pi},0)$ noktasına doğru uzanan $\mathbf{r}(t) = \left(e^{2t}\cos t\right)\mathbf{i} + \left(e^{2t}\sin t\right)\mathbf{j}$ düzlem eğrisi üzerinde yapılan işi iki yolla bulunuz:

a. İş integralini hesaplamak için eğrinin parametrizasyonunu kullanarak.

b. $\mathbf{F}$ için bir potansiyel fonksiyonu hesaplayıp bunu kullanarak.

2. $\mathbf{F} = (x^2+z)\mathbf{i} + (y^2+2x)\mathbf{j} + (z^2-y)\mathbf{k}$ vektör alanı verilsin. $x^2+y^2+z^2 = 1$ küresi ile $z = \sqrt{x^2+y^2}$ konisinin kesişiminden oluşan kapalı eğri C olsun.

C eğrisi, yukarıdan bakıldığında z-ekseni etrafında saat yönünün tersine olacak şekilde yönlendirilmiştir. Buna göre $\mathbf{F}$ alanının C boyunca sirkülasyonunu hesaplayınız.

ertansinansahin.com

3. Green teoremini kullanarak, düzlemde saat yönünün tersine yönlendirilmiş basit kapalı bir C eğrisi ve bu eğrinin çevrelediği R bölgesi için R bölgesinin alanının aşağıdaki çizgi integrali ile hesaplanabileceğini gösteriniz:

$$\text{Alan}(R) = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

4. $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} - yz\mathbf{j}$ vektör alanı ve $x = y^2$ parabolik silindirinin $-1 \le y \le 1$ aralığında kalan kısmı ile $z = 0$ ve $z = 3$ düzlemleri tarafından sınırlanan S yüzeyi veriliyor. S yüzeyinin yönü xz-düzleminden uzağa doğru olduğuna göre, bu yüzey boyunca $\mathbf{F}$ vektör alanının akısını ($\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$) hesaplayınız.

ertansinansahin.com

Cevaplar

Örnek sorular

1	$\frac{\sqrt{6}}{2}$
2	$\frac{1}{2} + 2\sqrt{2}$
3	a. $M = 6\pi - 8$ b. $\bar{x} = \frac{4}{M}\int_0^{\pi} \cos\theta(3 - 2\sin\theta)d\theta$ $\bar{y} = \frac{4}{M}\int_0^{\pi} \sin\theta(3 - 2\sin\theta)d\theta$
4	$\frac{4}{3}$
5	Akı $= 12\pi$
6	$\frac{8}{9}$
7	$f(x,y,z) = e^x \sin y + xyz + yz + C$
8	a. Videoya gidiniz. b. $D = \mathbb{R}^3 - \{z\text{-ekseni}\}$ c. 2π, korunumlu değildir.
9	8
10	a. 2π b. 2π
11	a. 0 b. 0
12	1
13	a. $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}$, $0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi$ b. $\mathbf{r}(\phi,\theta) = (a\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (a\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j}$ $+(a\cos\phi)\mathbf{k}$, $0 \le \phi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi$ c. $\mathbf{r}(\theta,z) = (2\sin 2\theta)\mathbf{i} + (4\sin^2\theta)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $0 \le \theta \le \pi, 0 \le z \le 5$
14	$\pi\sqrt{2}$
15	$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dy\,dx$
16	$\int_0^1\int_0^{1-x}(1 - x - y)\sqrt{3}\,dy\,dx$
17	$\int_0^1\int_0^{1-x}\sqrt{y}(1 + 4x^2)\,dy\,dx$
18	$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(4x + 2xy^2 + 4 - x^2 - y^2\right)dy\,dx$
19	a. $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 4\pi$ b. $\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = 4\pi$
20	a. $\nabla\times\mathbf{F} = 4\mathbf{k}$ b. $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 4\pi\rho^2$ ve $(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{k} = \frac{1}{\pi\rho^2}\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 4$
21	a. 4π b. 4π

Alıştırmalar ve problemler

1	a. $e^{2\pi} - 1$ b. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
2	π
3	Videoya gidiniz.
4	8

KALKÜLÜS 1–2

TÜRKÇE-İNGİLİZCE TERİM KARŞILIKLARI

1. Ünite: Limitler ve Süreklilik

Limit Limit

Limit kuralları Limit laws

Ortalama değişim oranı Average rate of change

Anlık değişim oranı Instantaneous rate of change

Kiriş doğrusu Secant line

Teğet doğrusu Tangent line

Sıkıştırma teoremi Sandwich theorem

Limitin tam tanımı Precise definition of a limit

Tek taraflı limit One-sided limit

Sağdan limit Right-hand limit

Soldan limit Left-hand limit

Sonsuzdaki limit Limit at infinity

Sonsuz limit Infinite limit

Yatay asimptot Horizontal asymptote

Düşey asimptot Vertical asymptote

Eğik asimptot Oblique asymptote

Süreklilik Continuity

Sürekli fonksiyon Continuous function

Süreksizlik Discontinuity

Kaldırılabilir süreksizlik Removable discontinuity

Sıçrama süreksizliği Jump discontinuity

Sonsuz süreksizlik Infinite discontinuity

Salınımlı süreksizlik Oscillating discontinuity

Sürekli genişleme Continuous extension

Ara değer teoremi Intermediate value theorem

Tam değer fonksiyonu Greatest integer function

ertansinansahin.com

2. Ünite: Türev

Türev Derivative

Türev alma Differentiation

Türevlenebilir Differentiable

Fark bölümü Difference quotient

Bir noktadaki eğim Slope at a point

Normal doğrusu Normal line

Köşe Corner

Sivri uç Cusp

Kuvvet kuralı Power rule

Çarpım kuralı Product rule

Bölüm kuralı Quotient rule

Yüksek mertebeden türev Higher-order derivative

Değişim oranı Rate of change

Konum Position

Yer değiştirme Displacement

Hız Velocity

Sürat Speed

İvme Acceleration

Silkme Jerk

Zincir kuralı Chain rule

Kapalı türev Implicit differentiation

Ters trigonometrik fonksiyon Inverse trigonometric function

İlişkili oranlar Related rates

Doğrusallaştırma Linearization

Diferansiyel Differential

3. Ünite: Türev Uygulamaları

Mutlak (global) maksimum Absolute (global) maximum

Mutlak (global) minimum Absolute (global) minimum

Yerel maksimum Local maximum

Yerel minimum Local minimum

Ekstremum değer Extreme value

Uç değer teoremi Extreme value theorem

Kritik nokta Critical point

Rolle teoremi Rolle's theorem

Ortalama değer teoremi Mean value theorem

Artan fonksiyon Increasing function

Azalan fonksiyon Decreasing function

Birinci türev testi First derivative test

İkinci türev testi Second derivative test

Konkavlık Concavity

Yukarı konkav Concave up

Aşağı konkav Concave down

Dönüm noktası Point of inflection

Belirsiz biçim Indeterminate form

L'Hôpital kuralı L'Hôpital's rule

Optimizasyon Optimization

Newton yöntemi Newton's method

Ters türev Antiderivative

4. Ünite: İntegral

Alan Area

Sonlu toplam Finite sum

Alt toplam Lower sum

Üst toplam Upper sum

Sigma gösterimi Sigma notation

Bölüntü Partition

Bölüntünün normu Norm of a partition

Riemann toplamı Riemann sum

İntegrallenebilir Integrable

İntegral sınırları Limits of integration

Bir fonksiyonun ortalama değeri Average value of a function

Kalkülüsün temel teoremi Fundamental theorem of calculus

Toplam alan Total area

Eğriler arasındaki alan Area between curves

5. Ünite: İntegrasyon Uygulamaları

Hacim Volume

Kesit alanı Cross-sectional area

Dilimleme yöntemi Method of slicing

Dönel cisim Solid of revolution

Dönme ekseni Axis of revolution

Disk yöntemi Disk method

Pul yöntemi Washer method

Silindirik kabuk yöntemi Shell method

Silindirik kabuk Cylindrical shell

Eğri uzunluğu Arc length

Yay uzunluğu diferansiyeli Arc length differential

Düzgün (pürüzsüz) eğri Smooth curve

Dönel yüzey Surface of revolution

Yüzey alanı Surface area

İş Work

Yay sabiti (katsayısı) Spring constant

Hooke yasası Hooke's law

Akışkan basıncı Fluid pressure

Akışkan kuvveti Fluid force

Ağırlık yoğunluğu Weight density

Moment Moment

Kütle merkezi Center of mass

Ağırlık merkezi (geometrik merkez) Centroid

Yoğunluk Density

İnce levha Thin plate

ertansinansahin.com

6. Ünite: İntegraller ve Aşkın Fonksiyonlar

Aşkın fonksiyon Transcendental function

Doğal logaritma Natural logarithm

Üstel fonksiyon Exponential function

Logaritmik türev alma Logarithmic differentiation

Ters fonksiyon Inverse function

Üstel büyüme Exponential growth

Üstel azalma (azalış) Exponential decay

Yarılanma ömrü (yarı ömür) Half-life

Diferansiyel denklem Differential equation

Ayrılabilir diferansiyel denklem Separable differential equation

Başlangıç değer problemi Initial value problem

Newton soğuma yasası Newton's law of cooling

Hiperbolik fonksiyon Hyperbolic function

Hiperbolik sinüs Hyperbolic sine

Hiperbolik kosinüs Hyperbolic cosine

Ters hiperbolik fonksiyon Inverse hyperbolic function

Zincir eğrisi (katener) Catenary

Göreli büyüme oranı Relative rate of growth

Daha hızlı büyümek Grow faster

Aynı hızda büyümek Grow at the same rate

7. Ünite: İntegrasyon Teknikleri

Belirsiz integral Indefinite integral

Belirli integral Definite integral

İntegrand (tümlevlenen) Integrand

Değişken değiştirme Substitution

Kısmi integrasyon Integration by parts

Tablo yöntemi Tabular integration

İndirgeme formülü Reduction formula

Trigonometrik integral Trigonometric integral

Trigonometrik değişken değiştirme Trigonometric substitution

Kısmi kesirler Partial fractions

Kısmi kesirlere ayrıştırma Partial fraction decomposition

Rasyonel fonksiyon Rational function

Basit (has) kesir Proper fraction

İndirgenemez ikinci derece çarpan Irreducible quadratic factor

İntegral tablosu Table of integrals

Bilgisayar cebiri sistemi Computer algebra system

Sayısal integrasyon Numerical integration

Yamuk kuralı Trapezoidal rule

Simpson kuralı Simpson's rule

Hata sınırı Error bound

Has olmayan integral Improper integral

Yakınsak integral Convergent integral

Iraksak integral Divergent integral

Doğrudan karşılaştırma testi Direct comparison test

Limit karşılaştırma testi Limit comparison test

ertansinansahin.com

8. Ünite: Sonsuz Diziler ve Seriler

Dizi Sequence

Terim Term

Dizinin limiti Limit of a sequence

Yakınsak Convergent

Iraksak Divergent

Yakınsaklık Convergence

Iraksaklık Divergence

Monoton dizi Monotonic sequence

Sınırlı dizi Bounded sequence

Monoton dizi teoremi Monotonic sequence theorem

Özyinelemeli tanım Recursive definition

Sonsuz seri Infinite series

Kısmi toplam Partial sum

Geometrik seri Geometric series

Ortak oran Common ratio

Teleskopik seri Telescoping series

Harmonik seri Harmonic series

p-serisi p-series

Iraksaklık için n. terim testi nth-term test for divergence

İntegral testi Integral test

Karşılaştırma testi Comparison test

Oran testi Ratio test

Kök (Cauchy kök) testi Root test

Mutlak yakınsaklık Absolute convergence

Koşullu yakınsaklık Conditional convergence

Alterne (almaşık) seri Alternating series

Alterne (almaşık) seri testi Alternating series test

Kuvvet serisi Power series

Yakınsaklık yarıçapı Radius of convergence

Yakınsaklık aralığı Interval of convergence

Taylor serisi Taylor series

Maclaurin serisi Maclaurin series

Taylor polinomu Taylor polynomial

Kalan terim Remainder

Binom serisi Binomial series

Kalan tahmin teoremi Remainder estimation theorem

9. Ünite: Parametrik Denklemler ve Kutupsal Koordinatlar

Parametrik denklem Parametric equation

Parametre Parameter

Parametre aralığı Parameter interval

Parametrizasyon (parametrelendirme) Parametrization

Parametrik eğri Parametric curve

Başlangıç noktası Initial point

Bitiş noktası Terminal point

Sikloit Cycloid

Kutupsal koordinatlar Polar coordinates

Kutup Pole

Kutupsal eksen Polar axis

Kutupsal denklem Polar equation

Kardiyoit (kalp eğrisi) Cardioid

Gül eğrisi Rose curve

Limason Limaçon

Lemniskat Lemniscate

Simetri testi Symmetry test

Konik kesit Conic section

Parabol Parabola

Elips Ellipse

Hiperbol Hyperbola

Odak Focus

Doğrultman Directrix

Tepe noktası Vertex

Asimptot Asymptote

Dışmerkezlik Eccentricity

Büyük eksen Major axis

Küçük eksen Minor axis

ertansinansahin.com

10. Ünite: Vektörler ve Uzay Geometrisi

Üç boyutlu koordinat sistemi Three-dimensional coordinate system

Sağ el kuralı Right-hand rule

Sekizde bir bölge Octant

Vektör Vector

Skaler Scalar

Bileşen Component

Birim vektör Unit vector

Standart birim vektörler Standard unit vectors

Uzunluk Length

Yön Direction

Nokta (iç) çarpımı Dot product

Skaler çarpım Scalar product

Vektörel (dış) çarpım Cross product

Vektör izdüşümü Vector projection

Skaler bileşen Scalar component

Dik (dikgen) vektörler Orthogonal vectors

Paralel vektörler Parallel vectors

Üçlü skaler çarpım Triple scalar product

Paralelkenar Parallelogram

Paralelyüzlü Parallelepiped

Doğru Line

Düzlem Plane

Normal vektör Normal vector

Aykırı doğrular Skew lines

Silindir Cylinder

Kuadrik (ikinci dereceden) yüzey Quadric surface

Elipsoit Ellipsoid

Paraboloit Paraboloid

Hiperboloit Hyperboloid

Hiperbolik paraboloit Hyperbolic paraboloid

Koni Cone

11. Ünite: Vektör Değerli Fonksiyonlar ve Uzayda Hareket

Vektör değerli fonksiyon Vector-valued function

Uzay eğrisi Space curve

Teğet vektör Tangent vector

Teğet doğru Tangent line

Hız vektörü Velocity vector

İvme vektörü Acceleration vector

Sürat Speed

Helis Helix

Eğik atış hareketi Projectile motion

Yay uzunluğu parametresi Arc length parameter

Birim teğet vektör Unit tangent vector

Eğrilik Curvature

Eğrilik yarıçapı Radius of curvature

Eğrilik merkezi Center of curvature

Eğrilik çemberi Circle of curvature

Birim normal vektör Principal unit normal vector

Binormal vektör (ikincil dikme) Binormal vector

Burulma Torsion

TNB çatısı TNB frame

Teğetsel bileşen Tangential component

Normal bileşen Normal component

Kepler yasaları Kepler's laws

12. Ünite: Kısmi Türevler

Çok değişkenli fonksiyon Function of several variables

Tanım kümesi Domain

Görüntü kümesi Range

Seviye (düzey) eğrisi Level curve

Seviye (düzey) yüzeyi Level surface

Kontur çizgisi Contour line

İç nokta Interior point

Sınır noktası Boundary point

Açık bölge Open region

Kapalı bölge Closed region

Sınırlı bölge Bounded region

İki yol testi Two-path test

Kısmi türev Partial derivative

İkinci mertebe kısmi türev Second-order partial derivative

Karışık türev Mixed derivative

Türevlenebilir Differentiable

Zincir kuralı Chain rule

Kapalı türev Implicit differentiation

Yönlü türev Directional derivative

Gradyan Gradient

Gradyan vektörü Gradient vector

Teğet düzlem Tangent plane

Normal doğru Normal line

Doğrusallaştırma Linearization

Toplam diferansiyel Total differential

Yerel maksimum Local maximum

ertansinansahin.com

Yerel minimum Local minimum

Kritik nokta Critical point

Eyer noktası Saddle point

İkinci türev testi Second derivative test

Hessian determinantı Hessian

Mutlak ekstremum Absolute extremum

Lagrange çarpanları Lagrange multipliers

Kısıt Constraint

Kısıtlı değişken Constrained variable

13. Ünite: Katlı İntegraller

Katlı integral Multiple integral

Çift integral Double integral

Yinelenmiş integral Iterated integral

Fubini teoremi Fubini's theorem

Riemann toplamı Riemann sum

İntegrasyon bölgesi Region of integration

İntegrasyon sınırları Limits of integration

İntegrasyon sırası Order of integration

Ortalama değer Average value

Üçlü integral Triple integral

Kutupsal biçimde çift integral Double integral in polar form

Silindirik koordinatlar Cylindrical coordinates

Küresel koordinatlar Spherical coordinates

Hacim elemanı Volume element

Birinci moment First moment

Eylemsizlik momenti (dönme eylemsizliği) Moment of inertia

Değişken değiştirme Change of variables

Jakobiyen Jacobian

Dönüşüm Transformation

ertansinansahin.com

14. Ünite: İntegraller ve Vektör Alanları

Eğrisel (hat) integral Line integral

Vektör alanı Vector field

Gradyan alanı Gradient field

İş Work

Dolanım (dolaşım) Circulation

Akı Flux

Yoldan bağımsızlık Path independence

Korunumlu alan Conservative field

Potansiyel fonksiyon Potential function

Tam diferansiyel Exact differential

Bağlantılı bölge Connected region

Basit bağlantılı bölge Simply connected region

Basit kapalı eğri Simple closed curve

Pozitif yönlendirme Positive orientation

Green teoremi Green's theorem

Rotasyonel (dolam) Curl

Diverjans (ıraksay) Divergence

Parametrize edilmiş yüzey Parametrized surface

Yüzey alanı elemanı Surface area element

Yüzey integrali Surface integral

Yönlendirilebilir yüzey Orientable surface

Stokes teoremi Stokes' theorem

Diverjans teoremi Divergence theorem