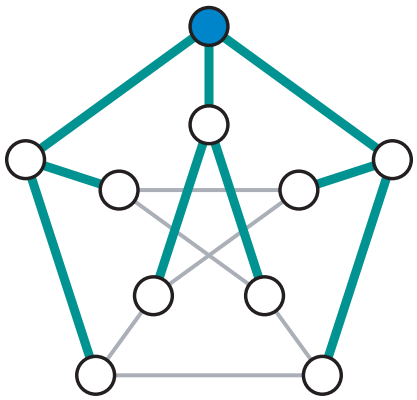
AYRIK MATEMATİK

SORU KİTABI

ÖRNEK SAYFALAR

13 ünite · 180 soru · adım adım çözümler



Ertan Sinan Şahin

ertansinansahin.com

Bu kitap nasıl kullanılır?

- Her ünite, soruların dayandığı tanım ve formülleri özetleyen bir hatırlatma kutusuyla açılır.
- Zorluk: ★☆☆ temel ★★☆ orta ★★★ ileri. Her ünitede birkaç çoktan seçmeli kavram sorusu vardır; her ünite sınav tipi karma sorularla biter.
- Her sorunun altındaki noktalı alan sizin çözümünüz içindir. Önce kendiniz çözün; takıldığınızda hatırlatma kutusuna ve ders notuna dönün, çözüme en son bakın.
- Bütün çözümler kitabın sonundadır. Sorunun yanındaki Çözüm → bağlantısı çözüme, çözümdeki ← Soru bağlantısı soruya götürür. Kısa cevaplar **CEVAP** kutusundadır.
- **Gösterim:** Bağlaçlar $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$; niceleyiciler $\forall$, $\exists$; tümleyen $\overline{A}$, fark $A-B$; seçme ve sıralama sayıları $\binom{n}{k}$, $P(n,k)$; denklik $a \equiv b \pmod{m}$; en büyük ortak bölen ve en küçük ortak kat EBOB, EKOK; çizge $G=(V,E)$, derece $\deg(v)$. Doğruluk tablolarında D doğru, Y yanlış demektir. Şekillerde istenen yol, devre ya da ağaç kalın ve renkli çizilir.
- **İspatlar:** İspat sorularının çözümü önce yöntemi adlandırır (doğrudan ispat, karşıt tersle ispat, çelişkiyle ispat, tümevarım…), sonra numaralı adımlarla ilerler. Kendi ispatınızı aynı düzende yazmayı deneyin.
- **Vize ve final:** Okulların çoğunda vize ve final konuları şöyle bölünür:

Vize	Ünite 1–6	mantık, ispat yöntemleri, kümeler ve fonksiyonlar, algoritmalar, sayılar kuramı, tümevarım
Final	Ünite 7–13	sayma, ayrık olasılık, yineleme bağıntıları, bağıntılar, çizgeler, ağaçlar, Boole cebri

İleri diye işaretli üniteleri (8 ve 13) okulların bir kısmı işler. Bağıntı, latis, Boole cebri ve otomat ağırlıklı derslerde Ünite 10 ve 13 öne çıkar. Kendi dersinizin izlencesine göre çalışacağınız üniteleri seçin.

İçindekiler

Sayfa numaraları tam kitaba aittir. Renkli üniteler bu örnekte vardır; tıklayınca o üniteye gidersiniz.

1 **Önermeler Mantığı** ..... 14 soru 4
2 Yüklem Mantığı ve İspat Yöntemleri ..... 14 soru 11
3 Kümeler, Fonksiyonlar, Diziler ve Toplamlar ..... 16 soru 18
4 Algoritmalar ve Fonksiyonların Büyümesi ..... 10 soru 26
5 Sayılar Kuramı ve Kriptografi ..... 14 soru 32
6 Tümevarım ve Özyineleme ..... 14 soru 38
7 **Sayma** ..... 16 soru 45
8 Ayrık Olasılık (ileri) ..... 10 soru 52
9 İleri Sayma Teknikleri ..... 14 soru 57
10 Bağıntılar ..... 16 soru 64
11 **Çizgeler** ..... 18 soru 73
12 Ağaçlar ..... 12 soru 83
13 Boole Cebri ve Otomatlar (ileri) ..... 12 soru 89

Çözümler 96

1. ÜNİTE

ÖNERMELER MANTIĞI

koşullu önerme	$p \to q \equiv \neg p \vee q \equiv \neg q \to \neg p$	dağılma	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
iki yönlü koşullu	$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$		$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
dışlayan veya	$p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$	yutma	$p \vee (p \wedge q) \equiv p, \quad p \wedge (p \vee q) \equiv p$
De Morgan	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	tümleyen	$p \vee \neg p \equiv \mathrm{D}, \quad p \wedge \neg p \equiv \mathrm{Y}$
	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	özdeşlik, baskınlık	$p \wedge \mathrm{D} \equiv p, \quad p \vee \mathrm{D} \equiv \mathrm{D}$

Aksi yazılmadıkça şu kabuller geçerlidir. Doğruluk tablolarında D doğru, Y yanlış demektir; satırlar D değerleri önce gelecek biçimde sıralanır. Denklemlerde D her zaman doğru, Y her zaman yanlış olan önermeyi de gösterir. Her atamada doğru olan önerme totoloji, her atamada yanlış olan çelişki, ikisi de olmayan olumsal önermedir. Ayrılmalı normal biçim (DNF), $\wedge$ ile kurulmuş terimlerin $\vee$ ile bağlanmasıdır; birleşmeli normal biçim (KNF), $\vee$ ile kurulmuş terimlerin $\wedge$ ile bağlanmasıdır. Bağlaç önceliği $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ sırasıyladır; yine de parantezler açık yazılır. "q ancak p ise" kalıbı tek yönlü $q \to p$ demektir (p, q için gerekli koşuldur); iki yön için "ancak ve ancak" kullanılır.

Önermeler, bağlaçlar ve doğruluk tabloları

1.3 ★☆☆ Çözüm →

Aşağıdaki önermelerden hangisi bir totolojidir?

A) $(p \to q) \to (q \to p)$

B) $(p \vee q) \to (p \wedge q)$

C) $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$

D) $(p \to q) \vee (q \to p)$

E) $(p \leftrightarrow q) \to (p \wedge q)$

Mantıksal denklik

1.6 ★★☆ Çözüm →

Doğruluk tablosu kullanmadan, yalnız mantıksal denklik yasalarıyla aşağıdaki denkliği ispatlayınız:

$$(p \to q) \wedge (p \vee q) \wedge (q \to r) \equiv q \wedge r.$$

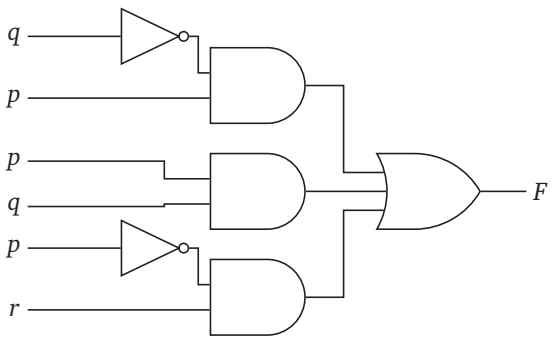
Normal biçimler ve mantık devreleri

1.11 ★★☆ Çözüm →

Şekildeki mantık devresinin girişleri p, q, r, çıkışı F'dir. Aynı harfle gösterilen teller aynı girişe bağlıdır.

a. F'yi girişler cinsinden bir önermeyle yazınız.

b. Önermeyi denklik yasalarıyla sadeleştiriniz. Aynı işi gören, tek kapılı bir devre öneriniz.



7. ÜNİTE

SAYMA

toplama kuralı ($A \cap B = \varnothing$)	$\lvert A \cup B \rvert = \lvert A \rvert + \lvert B \rvert$
çarpma kuralı	$\lvert A \times B \rvert = \lvert A \rvert \cdot \lvert B \rvert$
çıkarma kuralı	$\lvert A \cup B \rvert = \lvert A \rvert + \lvert B \rvert - \lvert A \cap B \rvert$
güvercin yuvası	N nesne, k kutu $\Rightarrow$ bir kutuda $\geq \lceil N/k \rceil$
permütasyon	$P(n,k) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
kombinasyon	$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$
Pascal özdeşliği	$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
binom teoremi	$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$
tekrarlı permütasyon	$\dfrac{n!}{n_1!\,n_2! \cdots n_m!}$
tekrarlı kombinasyon	$\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$

Aksi yazılmadıkça şu kabuller geçerlidir. Kişiler ve nesneler birbirinden ayırt edilebilir. “Seçmek” sırasız seçim, “dizmek” ya da “görev dağıtmak” sıralı seçim demektir. Rakamlar 0–9’dur; kod ve parolalarda konum önemlidir. $\lceil x \rceil$, x’ten küçük olmayan en küçük tam sayıdır; $k > n$ ise $\binom{n}{k} = 0$ alınır. Ağaç diyagramlarında her dal bir seçimi, her yaprak bir sonucu gösterir.

Güvercin yuvası ilkesi

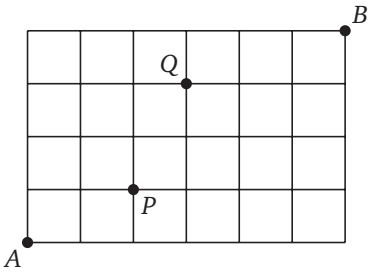
7.6 ★★☆ Çözüm →

Kenar uzunlukları 8 ve 3 birim olan bir dikdörtgenin içine ya da kenarlarına 13 nokta yerleştiriliyor. Bu noktalardan, aralarındaki uzaklık en çok $\sqrt{5}$ birim olan iki tanesinin bulunduğunu gösteriniz.

Permütasyon ve kombinasyon

7.10 ★★☆ Çözüm →

Izgara planlı bir fuar alanında bir ziyaretçi, şekildeki A girişinden B çıkışına yalnız doğuya (sağa) ya da kuzeye (yukarı) giderek ulaşacaktır. Her çizgi bir koridor, her kesişim bir kavşaktır.



a. Kaç farklı yol vardır?

b. Bunların kaçı P kavşağındaki bilgi masasından geçer?

c. Q kavşağında stant kurulumu sürdüğü için kavşak kapalıdır. P'den geçip Q'dan geçmeyen kaç yol vardır?

Karma sorular

7.16 ★★★ Çözüm →

14 günlük bir yurt içi turunda 5 gün serbest gün, öteki 9 gün rehberli gezi günü olacaktır. Tur şirketi art arda iki serbest gün koymak istemiyor.

a. Serbest günler kaç farklı biçimde belirlenebilir?

b. Beş serbest günün her birine beş isteğe bağlı etkinlikten (tekne turu, müze, yürüyüş, yemek atölyesi, bisiklet turu) farklı biri konacaktır. Kaç farklı tur planı yapılabilir?

c. Turun ilk ve son günü de serbest gün olamazsa (a)'nın cevabı ne olur?

11. ÜNİTE

ÇİZGELER

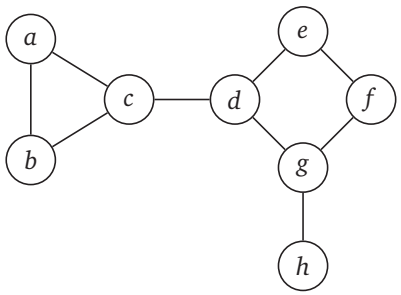
el sıkışma teoremi	$\sum_{v\in V}\deg(v)=2\lvert E\rvert$	Dijkstra	$L(v)\leftarrow\min\{L(v),\,L(u)+w(u,v)\}$
yönlü çizge	$\sum_v \deg^-(v)=\sum_v \deg^+(v)=\lvert E\rvert$	Euler formülü	$v-e+r=2$
uzunluğu k olan v_i–v_j yolları	$(A^k)_{ij}$	düzlemsel, $v\geq 3$	$e\leq 3v-6$
Euler devresi	bağlantılı, bütün dereceler çift	Kuratowski	düzlemsel $\Leftrightarrow$ K_5, $K_{3,3}$ bölünmesi yok
Euler yolu	bağlantılı, tam iki tek dereceli düğüm	kromatik sayı	
Hamilton (Dirac)		$\chi(G)\geq$ en büyük tam alt çizgenin düğüm sayısı	
$n\geq 3,\ \deg(v)\geq n/2\ \Rightarrow$ devre var			

Aksi yazılmadıkça şu kabuller geçerlidir. Çizgeler sonlu, yönsüz ve basittir (ilmek ve katlı kenar yoktur). Yolda kenar ve düğüm tekrarlanabilir; yolun uzunluğu kenar sayısıdır. Başladığı düğümde biten yola devre, düğümleri birbirinden farklı ve en az üç kenarlı devreye çevrim denir. Euler yolu (devresi) her kenardan tam bir kez, Hamilton devresi her düğümden tam bir kez geçer. Düzlemsel çizimde v düğüm, e kenar, r bölge sayısıdır. Şekillerde istenen yol, devre ya da alt çizge yalnız çözümde ders rengiyle kalın çizilir.

İzomorfizm ve bağlantılılık

11.5

★☆☆ Çözüm →



Bir yerleşkedeki sekiz binanın (a–h) fiber bağlantıları şekildeki çizgeyle gösterilmiştir. Silininca bağlantılı bileşen sayısını artıran kenara *kesme kenarı*, kenarlarıyla birlikte silinince bileşen sayısını artıran düğüme *kesme düğümü* denir.

a. Tek başına kopunca ağı bölen kabloları (kesme kenarlarını) bulunuz.

b. Tek başına arızalanınca ağı bölen binaları (kesme düğümlerini) bulunuz.

c. Hiç kesme kenarı kalmaması için tek bir yeni kablo hangi iki bina arasına çekilebilir? Bütün olanakları yazınız.

Düzlemsellik ve boyama

11.13

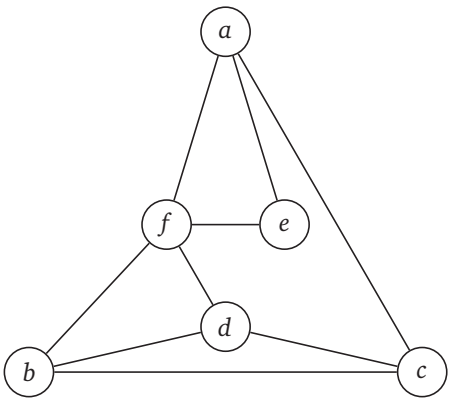
★★★ Çözüm →

Bağlantılı ve düzlemsel bir basit çizgenin ($v \geq 3$) bir düzlemsel çiziminde, dış bölge dahil her bölgenin sınırında tam üç kenar olsun.

a. $e = 3v - 6$ ve $r = 2v - 4$ olduğunu ispatlayınız.

b. Şekildeki düzlemsel çizgeye, çizge basit ve düzlemsel kalacak biçimde en çok kaç kenar eklenebilir? Bu kadar kenarı ekleyip çizgeyi kesişmesiz çiziniz.

c. 12 düğümlü, her bölgesi üçgen olan bağlantılı düzlemsel bir basit çizgede bütün düğümlerin derecesi eşitse bu derece kaçtır?



ÇÖZÜMLER

1 ÖNERMELER MANTIĞI

1.3

← Soru

Bir koşullu önerme ya da ayrılma için onu yanlış yapan atama aranır. (D)'de ayrılmanın yanlış olması için iki koşullu önermenin de yanlış olması gerekir. $p \to q$ yanlışsa p doğru, q yanlıştır; o zaman $q \to p$ doğrudur. İkisi birlikte yanlış olamaz; önerme her atamada doğrudur. **D** doğrudur.

- (A): p yanlış, q doğru iken $p \to q$ doğru, $q \to p$ yanlıştır; önerme yanlıştır. Bir koşullu önermenin karşıtı ona denk değildir.
- (B): p doğru, q yanlış iken $p \vee q$ doğru, $p \wedge q$ yanlıştır.
- (C): p yanlış, q doğru iken $p \to q$ doğru, $\neg p \to \neg q$ yanlıştır. Ters de koşullu önermeye denk değildir.
- (E): p ve q ikisi de yanlışken $p \leftrightarrow q$ doğru, $p \wedge q$ yanlıştır.

CEVAP D

1.6

← Soru

Yöntem: doğrudan ispat (denklik zinciri).

1. Koşullu önermeyi ayrılmayla yazalım: $p \to q \equiv \neg p \vee q$.
2. İlk iki çarpanı değişme yasasıyla düzenleyip dağılma yasasını uygulayalım:
$$(q \vee \neg p) \wedge (q \vee p) \equiv q \vee (\neg p \wedge p).$$
3. Tümleyen yasasıyla $\neg p \wedge p \equiv \mathrm{Y}$, özdeşlik yasasıyla $q \vee \mathrm{Y} \equiv q$. İlk iki çarpan q'ya denktir.
4. Kalan ifade $q \wedge (q \to r) \equiv q \wedge (\neg q \vee r)$. Dağılma yasasıyla
$$(q \wedge \neg q) \vee (q \wedge r) \equiv \mathrm{Y} \vee (q \wedge r) \equiv q \wedge r.$$

Her adım bir denklik yasasıdır; iki taraf denktir. ■

Kontrol (tek atama): p doğru, q doğru, r yanlış iken sol taraf $\mathrm{D} \wedge \mathrm{D} \wedge \mathrm{Y} = \mathrm{Y}$, sağ taraf $\mathrm{D} \wedge \mathrm{Y} = \mathrm{Y}$ ✓.

Sık yapılan hata: 2. adımda $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee q)$'yu $(\neg p \wedge p) \vee q$ yerine $(\neg p \vee p) \wedge q$ yazmak; dağılma yasası ortak terimi (q) dışarı alır.

CEVAP İspat yukarıda: ilk iki çarpan q'ya, $q \wedge (q \to r)$ ise $q \wedge r$'ye denktir.

1.11

← Soru

a. Üç ve kapısının çıkışları yukarıdan aşağıya $p \wedge \neg q$, $p \wedge q$ ve $\neg p \wedge r$'dir. Veya kapısı bunları birleştirir:
$$F = (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r).$$

b. İlk iki terimde p ortaktır (dağılma, tümleyen, özdeşlik):
$$(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge (\neg q \vee q) \equiv p \wedge \mathrm{D} \equiv p.$$
Kalan ifadede $\vee$'nin $\wedge$ üzerine dağılmasını kullanalım:
$$p \vee (\neg p \wedge r) \equiv (p \vee \neg p) \wedge (p \vee r) \equiv p \vee r.$$
$F \equiv p \vee r$'dir; q girişi çıkışı hiç etkilemez. Girişleri p ve r olan tek bir veya kapısı aynı işi görür.

Kontrol: p ve r yanlışken devrede ilk iki ve kapısı p yüzünden, üçüncüsü r yüzünden Y verir; F yanlıştır. $p \vee r$ de yanlıştır ✓.

CEVAP a. $F = (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
b. $F \equiv p \vee r$; tek veya kapısı

7 SAYMA

7.6

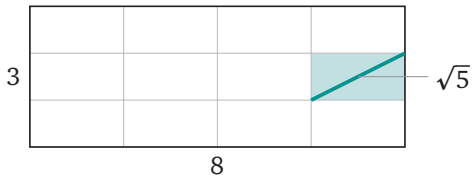
← Soru

Yöntem: güvercin yuvası ilkesi.

1. Dikdörtgeni kenarları 2 ve 1 birim olan $4 \cdot 3 = 12$ küçük dikdörtgene bölelim (şekil). Küçük dikdörtgenler yuvalar, noktalar güvercinlerdir.
2. İki küçük dikdörtgenin ortak kenarındaki bir nokta bunlardan yalnız birine (örneğin soldakine ya da alttakine) atanır. Böylece her nokta tam bir yuvaya düşer.

ertansinansahin.com

3. 13 nokta 12 yuvaya dağıldığından, güvercin yuvası ilkesine göre bir yuvada en az $\lceil 13/12 \rceil = 2$ nokta vardır.
4. Kenarları 2 ve 1 birim olan dikdörtgenin (sınırı dahil) iki noktası arasındaki uzaklık köşegeni aşamaz: $d \le \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$.



Bu yuvadaki iki nokta istenen çifttir. ■

CEVAP İspat yukarıda: 12 yuva, 13 nokta; bir yuvada iki nokta, uzaklık $\le \sqrt{5}$.

7.10

← Soru

a. Her yol 6 doğu (D) ve 4 kuzey (K) adımından oluşan 10 harfli bir dizidir; yol, K adımlarının 10 konumdan hangi 4'ünde olduğuyla belirlenir:

$$\binom{10}{4} = 210.$$

b. $A(0,0) \to P(2,1)$: 2 D, 1 K; $P \to B(6,4)$: 4 D, 3 K. Çarpma kuralıyla:

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{3} = 3 \cdot 35 = 105.$$

c. P ve $Q(3,3)$'ten birlikte geçen yollar: $A \to P$: 3; $P \to Q$: 1 D, 2 K, $\binom{3}{1} = 3$; $Q \to B$: 3 D, 1 K, $\binom{4}{1} = 4$:

$$3 \cdot 3 \cdot 4 = 36, \qquad 105 - 36 = 69.$$

Kontrol: $A \to P$ yolları elle sayılabilir: DDK, DKD, KDD; 3 yol, $\binom{3}{1} = 3$ ✓. $Q \to B$ yolları da $DDDK$, $DDKD$, $DKDD$, $KDDD$; 4 yol ✓.

CEVAP a. 210 b. 105 c. 69

7.16

← Soru

a. Önce 9 rehberli günü yan yana dizelim. Aralarında 8, iki uçta 2 olmak üzere 10 boşluk vardır:

$$_\,R\,_\,R\,_\,R\,_\,R\,_\,R\,_\,R\,_\,R\,_\,R\,_$$

Her boşluğa en çok bir serbest gün konursa iki serbest gün art arda gelmez; tersine, art arda olmayan her seçim bu yolla tam bir kez elde edilir. 10 boşluktan 5'i seçilir:

$$\binom{10}{5} = 252.$$

b. Her serbest gün kümesi için 5 farklı etkinlik 5 güne $5! = 120$ biçimde dağıtılır (çarpma kuralı):

$$252 \cdot 120 = 30240.$$

c. İki uçtaki boşluk kullanılamaz; yalnız rehberli günlerin arasındaki 8 boşluk kalır:

$$\binom{8}{5} = 56.$$

Kontrol (küçük durum): 5 günde art arda olmayan 2 serbest gün için formül $\binom{4}{2} = 6$ verir. Doğrudan liste: $\{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}$; 6 küme ✓.

Sık yapılan hata: (a)'da $\binom{14}{5} = 2002$ yazmak; bu, art arda serbest günleri de sayar.

CEVAP a. 252 b. 30240 c. 56

ertansinansahin.com

11 ÇİZGELER

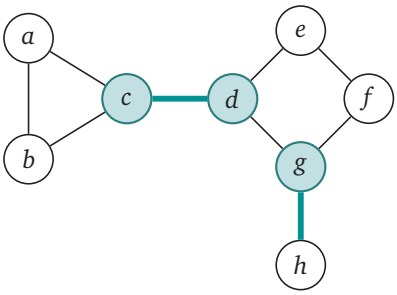
11.5

← Soru

a. Bir kenar, ancak hiçbir çevrimde değilse kesme kenarıdır: çevrimdeki kenar silinince uçları çevrimin geri kalanıyla bağlı kalır. a, b, c üçgenindeki ve d, e, f, g çevrimindeki kenarlar kesme kenarı değildir. Kalan iki kenar $\{c,d\}$ ve $\{g,h\}$'dir; $\{c,d\}$ silinince $\{a,b,c\}$ ile $\{d,e,f,g,h\}$, $\{g,h\}$ silinince h ayrılır.

b. c silinince $\{a,b\}$ ile $\{d,\ldots,h\}$; d silinince $\{a,b,c\}$ ile $\{e,f,g,h\}$; g silinince h ötekilerden ayrılır. a, b, e, f, h'nin her biri silindiğinde kalan çizge bağlantılıdır.

c. Yeni kablo, iki kesme kenarını birlikte içeren bir çevrim oluşturmalıdır. Kablonun uçları arasındaki eski yol $\{c,d\}$ ve $\{g,h\}$'den geçmelidir; bu, bir ucun h, öteki ucun a, b ya da c olmasıyla olur. Örneğin $\{h,c\}$ eklenince h,g,d,c,h çevrimi oluşur.



CEVAP a. $\{c,d\}$ ve $\{g,h\}$ b. c, d, g c. $\{h,a\}$, $\{h,b\}$ ya da $\{h,c\}$

11.13

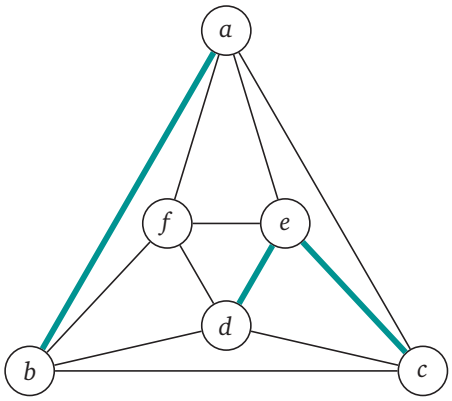
← Soru

a. Yöntem: doğrudan ispat (bölge sınırlarını iki yoldan sayma).

1. Bütün bölgelerin sınırlarındaki kenar sayıları toplansın. Her kenar iki kez sayılır (iki yanındaki bölge için); toplam $2e$'dir.
2. Her bölgenin sınırında 3 kenar olduğundan toplam $3r$'dir: $3r = 2e$, yani $r = 2e/3$.
3. Euler formülünde yerine konursa $v - e + 2e/3 = 2$, buradan $e = 3v - 6$.
4. $r = 2e/3 = 2(3v-6)/3 = 2v - 4$.

İki eşitlik de ispatlandı. ■

b. Çizgede $v = 6$, $e = 9$'dur. Düzlemsel basit çizgede $e \le 3v - 6 = 12$ olduğundan en çok 3 kenar eklenebilir. Üç kenar gerçekten eklenebilir: a–b, d–e ve c–e (şekilde kalın) kesişme oluşturmaz.



Yeni çizgede $e = 12 = 3v - 6$ ve bütün bölgeler üçgendir; $r = 2 \cdot 6 - 4 = 8$ bölge vardır.

c. (a)'ya göre $e = 3 \cdot 12 - 6 = 30$. Derece toplamı $2e = 60$; on iki düğümün dereceleri eşit olduğundan her biri $60/12 = 5$'tir. (Örnek: düzgün yirmi yüzlünün köşelerini düğüm, kenarlarını kenar alan çizge.)

CEVAP a. ispat yukarıda b. en çok 3 kenar (a–b, d–e, c–e) c. 5

ertansinansahin.com

KİTABIN TAMAMINDA

- 13 ünite, 180 soru ve hepsinin adım adım çözümü.
- Her ünitenin başında, soruların dayandığı bağıntıları özetleyen hatırlatma kutusu.
- Temel, orta ve ileri düzeyde sorular; her sorunun altında kendi çözümünüz için noktalı alan.
- Sorudan çözüme, çözümden soruya tek tıkla geçiş.

ertansinansahin.com