

DİFERANSİYEL DENKLEMLER

ÇALIŞMA KİTABI

13 ünite · 172 soru · adım adım çözümler



Ertan Sinan Şahin



ertansinansahin.com

1. ÜNİTE

TEMEL KAVRAMLAR

mertebe	denklemdaki en yüksek türev	teklik: lineer	$y' + p(x)y = g(x), x_0 \in I$
lineer denklem	$a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_0(x)y = g(x)$		p, g I 'da sürekli $\implies I$ 'da tek çözüm
başlangıç değer problemi	$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$	teklik: lineer olmayan	$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$
Euler yöntemi	$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), x_{n+1} = x_n + h$		$f, \partial f / \partial y$ sürekli $\implies x_0$ çevresinde tek çözüm

Aksi belirtilmedikçe bağımsız değişken x , bilinmeyen fonksiyon $y = y(x)$ ve $y' = dy/dx$ 'tir. Varlık-teklik sorularında yukarıdaki iki teorem kullanılır; lineer olmayan denklem için teorem, aralığın ne kadar geniş olduğunu söylemez.

Sınıflandırma ve çözüm kavramı

1.1

☆☆☆ Çözüm → s. 100

Aşağıdakilerden hangisi ikinci mertebeden, lineer bir adi diferansiyel denklemdir?

- A) $y'' + y y' = \cos x$
- B) $y'' + \sin y = x$
- C) $y''' - x y = 0$
- D) $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- E) $x^2 y'' - e^x y' + y = \ln x$

1.2

☆☆☆ Çözüm → s. 100

Her denklemin mertebesini yazınız; adi mi kısmi türevli mi, lineer mi lineer olmayan mı olduğunu belirtiniz. Lineer olmayanlarda lineerliği bozan terimi gösteriniz.

- a. $x^2 y''' + e^x y' = y + \cos x$
- b. $y' + x\sqrt{y} = 0$
- c. $u_{tt} = 4u_{xx} + u$ ($u = u(x, t)$)
- d. $(y'')^2 + 3y' = x$

1.3

★★★ Çözüm → s. 101

- a. $y = Cx e^{-x^2/2}$ ailesinin her C sabiti için $x y' = (1 - x^2)y$ denkleminin çözümü olduğunu gösteriniz.
- b. Bu aileden $y(1) = 2$ koşulunu sağlayan çözümü bulunuz.
- c. $y = e^{rx}$ fonksiyonu hangi r değerleri için $2y'' + y' - 3y = 0$ denkleminin çözümüdür?

1.4

★★★ Çözüm → s. 101

$y^2 - 2xy + 3x^2 = C$ bağıntısı veriliyor.

- a. Bu bağıntının $y' = (y - 3x)/(y - x)$ denkleminin kapalı çözümü olduğunu gösteriniz.
- b. $(1, 3)$ noktasından geçen çözümü önce kapalı, sonra açık biçimde yazınız.
- c. Açık çözüm hangi en geniş aralıkta tanımlıdır? Aralığın uçlarında ne olur?

Başlangıç değer problemi ve modelleme

1.5

★★☆ Çözüm → s. 101

$y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} + 2$ ailesi veriliyor.

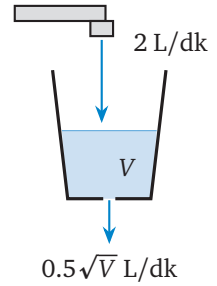
- Ailenin her üyesinin $y'' + 3y' - 4y = -8$ denkleminin çözümü olduğunu gösteriniz.
- $y(0) = 5$, $y'(0) = -2$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.
- $y(0) = a$, $y'(0) = b$ koşullarını sağlayan çözüm, $x \rightarrow \infty$ iken hangi koşulda sınırlı kalır? Bu durumda çözüm neye yaklaşır?

1.6

★★☆ Çözüm → s. 102

Boş bir kovaya bir musluktan dakikada 2 L su akıyor. Kovanın dibindeki küçük bir delikten, kovada V litre su varken dakikada $0.5\sqrt{V}$ litre su sızıyor (V litre cinsinden). Kovanın hacmi 20 L'dir.

- Kovadaki su hacmi $V(t)$ için diferansiyel denklemi kurunuz (t dakika).
Mertebesi nedir, lineer midir?
- Denge çözümünü bulunuz. Musluk açık kaldıkça kova taşar mı?
- Kova ağzına kadar doluyken aynı musluk ve delikle hacim nasıl değişir? Yön alanıyla açıklayınız.



ÇÖZÜMLER

1 TEMEL KAVRAMLAR

1.1

← Soru s. 4

Lineer bir denklemde y ve türevleri yalnız birinci kuvvetten bulunur, birbiriyle çarpılmaz ve bir fonksiyonun (sinüs, karekök...) içine girmez; katsayılar yalnız x 'e bağlı olabilir. (E)'de en yüksek türev y'' (mertebe 2), katsayılar x^2 , $-e^x$, 1 yalnız x 'e bağlı, sağ taraf $\ln x$ 'tir: ikinci mertebe lineer adi denklemdir.

- (A): $y y'$ çarpımı lineerliği bozar.
- (B): $\sin y$ terimi y 'nin lineer olmayan bir fonksiyonudur.
- (C): Lineerdir ama üçüncü mertebededir.
- (D): Kısmi türevli denklemdir (u iki değişkenin fonksiyonu).

CEVAP E

1.2

← Soru s. 4

a. En yüksek türev y''' : mertebe 3. Tek bağımsız değişken var: adi. $x^2 y''' + e^x y' - y = \cos x$ biçiminde yazılır; y ve türevleri birinci kuvvetten, katsayılar yalnız x 'e bağlı: lineer.

b. Mertebe 1, adi. $\sqrt{y}$ terimi y 'nin lineer olmayan bir fonksiyonudur: lineer değil.

c. $u = u(x, t)$ iki değişkenli: kısmi türevli. En yüksek türevler ikinci mertebeden: mertebe 2. u ve kısmi türevleri birinci kuvvetten: lineer.

d. En yüksek türev y'' : mertebe 2 (türevin kuvveti, yani 2, mertebeyi değiştirmez). Adi. $(y'')^2$ terimi yüzünden lineer değil. **Sık yapılan hata:** $(y'')^2$ terimini görüp mertebeyi 4 sanmak. Mertebe, türevin sırasındır; kuvveti değil.

CEVAP a. 3, adi, lineer b. 1, adi, lineer değil ($\sqrt{y}$) c. 2, kısmi türevli, lineer d. 2, adi, lineer değil $((y'')^2)$

1.3

← Soru s. 5

a. Çarpım kuralıyla:

$$y' = C e^{-x^2/2} + Cx(-x)e^{-x^2/2} = C(1-x^2)e^{-x^2/2}.$$

Buradan

$$x y' = (1-x^2) Cx e^{-x^2/2} = (1-x^2) y \checkmark$$

Eşitlik her x ve her C için sağlanır.b. $y(1) = C e^{-1/2} = 2$ olduğundan $C = 2e^{1/2}$:

$$y = 2x e^{(1-x^2)/2}.$$

c. $y' = r e^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$ yerine konunca

$$(2r^2 + r - 3) e^{rx} = 0.$$

 $e^{rx} \neq 0$ olduğundan $2r^2 + r - 3 = (r-1)(2r+3) = 0$:

$$r = 1 \quad \text{ya da} \quad r = -\frac{3}{2}.$$

CEVAP b. $y = 2x e^{(1-x^2)/2}$ c. $r = 1$, $r = -\frac{3}{2}$

1.4

← Soru s. 5

a. $y = y(x)$ kabul edip bağıntının iki yanının x 'e göre türevi alınır (kapalı türev):

$$2y y' - 2y - 2x y' + 6x = 0.$$

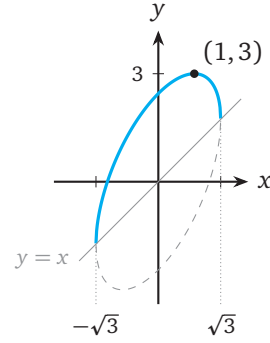
$$y'(2y - 2x) = 2y - 6x \implies y' = \frac{y-3x}{y-x} \checkmark$$

b. $(1, 3)$ için $C = 9 - 6 + 3 = 6$; kapalı çözüm $y^2 - 2xy + 3x^2 = 6$. Bu, y 'ye göre ikinci derece bir denklemdir:

$$y = x \pm \sqrt{x^2 - (3x^2 - 6)} = x \pm \sqrt{6 - 2x^2}.$$

 $x = 1$ 'de $1 + \sqrt{4} = 3$ olduğundan artı işaret alınır:

$$y = x + \sqrt{6 - 2x^2}.$$

c. Karekökün içi pozitif olmalı: $6 - 2x^2 > 0$, yani $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$. Uçlarda $y = x$ olur; denklemin paydası $y - x$ sıfırlanır ve çözüm eğrisinin teğeti düşeydir. Kapalı çözüm bir elipstir; açık çözüm onun üst yarısıdır (şekil).Kesikli alt yarı ($y = x - \sqrt{6 - 2x^2}$) aynı bağıntıdan gelen öteki çözümdür; $(1, 3)$ 'ten geçmez.**CEVAP** b. $y^2 - 2xy + 3x^2 = 6$; $y = x + \sqrt{6 - 2x^2}$
c. $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$; uçlarda teğet düşey

1.5

← Soru s. 6

a. $y' = C_1 e^x - 4C_2 e^{-4x}$, $y'' = C_1 e^x + 16C_2 e^{-4x}$. Yerine konunca

$$\begin{aligned} y'' + 3y' - 4y &= (1 + 3 - 4)C_1 e^x \\ &\quad + (16 - 12 - 4)C_2 e^{-4x} - 8 \\ &= -8 \checkmark \end{aligned}$$

b. Başlangıç koşulları:

$$C_1 + C_2 + 2 = 5, \quad C_1 - 4C_2 = -2.$$

Çıkarınca $5C_2 = 5$; $C_2 = 1$, $C_1 = 2$:

$$y = 2e^x + e^{-4x} + 2.$$

c. $e^{-4x} \rightarrow 0$ olduğundan çözümün sınırlı kalması için e^x teriminin katsayısı sıfır olmalıdır. Koşullardan:

$$C_1 + C_2 = a - 2, \quad C_1 - 4C_2 = b.$$

Birinciye 4 ile çarpıp ikinciye ekleyince $5C_1 = 4a + b - 8$ bulunur. $C_1 = 0$ için

$$b + 4a = 8.$$

Bu durumda $y = C_2 e^{-4x} + 2 \rightarrow 2$. Sabit $y = 2$ de bir çözümdür ($C_1 = C_2 = 0$).**CEVAP** b. $y = 2e^x + e^{-4x} + 2$ c. $b + 4a = 8$; $y \rightarrow 2$