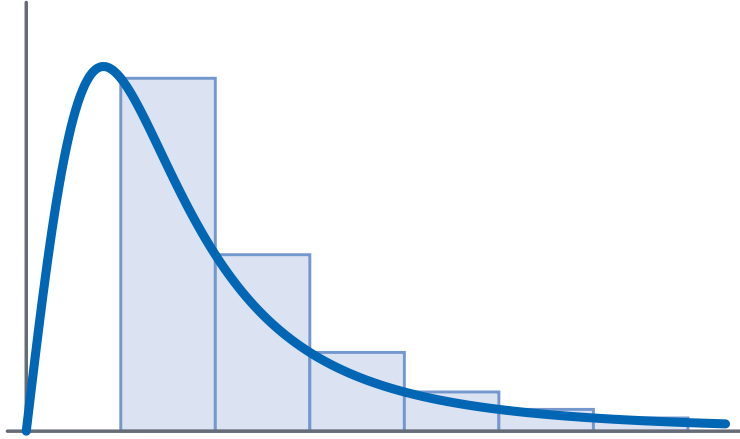


KALKÜLÜS 1

ÇALIŞMA KİTABI

9 ünite · 154 soru · adım adım çözümler



Ertan Sinan Şahin



ertansinansahin.com

2. ÜNİTE

TÜREV



video izle

türevin tanımı

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

çarpım

$$(uv)' = u'v + uv'$$

bölüm

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

zincir kuralı

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

ters fonksiyon, $b = f(a)$

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

ters sinüs

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ters tanjant

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

lineerleştirme

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Türevin tanımı

2.1



Çözüm → s. 88

$f(x) = \frac{2}{1 + \sqrt{x}}$ fonksiyonu veriliyor.

- $f'(9)$ değerini türevin limit tanımını kullanarak bulunuz.
- Eğrinin $x = 9$ noktasındaki teğet doğrusunun x eksenini kestiği noktayı bulunuz.

Grid area for solving the problem.

2.2



Çözüm → s. 88

Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi $x = 0$ noktasında türevlenebilir?

A) $|x|$

B) $\sqrt[3]{x}$

C) $x|x|$

D) $|\sin x|$

E) $x^{2/3}$

Grid area for solving the problem.

Türev alma kuralları

2.3



Çözüm → s. 89

$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ eğrisinin teğetinin yatay olduğu noktaları bulunuz.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.4



Çözüm → s. 89

$f(x) = (ax + b)e^x$ fonksiyonunun grafiği $(0, 1)$ noktasından geçmektedir ve grafiğin bu noktadaki teğetinin eğimi 3'tür.

- a ve b sabitlerini bulunuz.
- $f''(0)$ değerini hesaplayınız.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.5



Çözüm → s. 89

Bir doğru üzerinde hareket eden bir cismin t saniyedeki konumu $s(t) = t^3 - 15t^2 + 63t$ metredir $(0 \leq t \leq 8)$.

- Cismin hızını ve ivmesini bulunuz. Cisim hangi anlarda yön değiştirir?
- İlk 8 saniyede cismin aldığı toplam yolu ve ortalama hızını bulunuz.
- İvmenin sıfır olduğu andaki sürati bulunuz. Cisim hangi zaman aralıklarında yavaşlamaktadır?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.6



Çözüm → s. 89

Bir konser salonunda x bilet satıldığında elde edilen gelir $R(x) = 120x - 0.4x^2$ liradır ($0 \leq x \leq 300$).

- Marjinal gelir $R'(x)$ 'i bulunuz ve $R'(100)$ değerini hesaplayınız.
101. biletin getirdiği gerçek ek geliri hesaplayıp $R'(100)$ ile karşılaştırınız.
- Gelir hangi satış miktarında artmayı bırakır?

Grid area for problem 2.6.

2.7



Çözüm → s. 90

$y = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ eğrisinin $[0, 2\pi]$ aralığında teğetinin yatay olduğu noktaları bulunuz.

Grid area for problem 2.7.

1.15

← Soru s. 11

a. Payda $|x|(x+2)(x-1)$ 'dir; f , $x=0$, $x=-2$ ve $x=1$ 'de tanımsızdır, dolayısıyla bu noktalarda süreksizdir. Başka yerlerde sürekli fonksiyonların bölümüdür.

b. Pay $x(x-1)$ 'dir. Tanımlı olduğu her yerde sadeleştirirsek

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{|x|(x+2)(x-1)} = \frac{x}{|x|} \cdot \frac{1}{x+2}.$$

$\frac{x}{|x|}$, $x > 0$ için 1, $x < 0$ için -1 'dir.

- $x=1$: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Limit var ama fonksiyon tanımsız: *kaldırılabilir*.
- $x=0$: sağdan $\frac{1}{2}$, soldan $-\frac{1}{2}$. Tek taraflı limitler var ama farklı: *sıçrama*.
- $x=-2$: burada $x < 0$, yani $f(x) = -\frac{1}{x+2}$. $x \rightarrow -2^+$ iken $-\infty$ 'a, $x \rightarrow -2^-$ iken $+\infty$ 'a gider: *sonsuz süreksizlik*.

c. Yalnız $x=1$ 'de: $f(1) = \frac{1}{3}$ tanımlanırsa f orada sürekli olur. $x=0$ 'da iki tek taraflı limit farklı olduğu için, $x=-2$ 'de limit sonlu olmadığı için hiçbir değer işe yaramaz.

CEVAP a. $x=-2, 0, 1$ b. -2 : sonsuz; 0 : sıçrama; 1 : kaldırılabilir c. $x=1$, $f(1) = \frac{1}{3}$

1.16

← Soru s. 11

a. $x \rightarrow \infty$ iken pay ve paydayı x^2 'ye bölersek $f(x) \rightarrow a$; buna göre $a=3$. $x=0$ 'da soldan limit:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(\pi x)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \pi \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \frac{1}{x+1} = \pi.$$

Sağdan limit ve fonksiyon değeri $f(0) = \frac{b}{4}$ 'tür. Süreklilik için $\frac{b}{4} = \pi$, yani $b = 4\pi$.

b. $x \rightarrow -1$ iken pay $\sin(-\pi) = 0$ 'a, payda da 0 'a gider. $u = x+1$ diyelim ($u \rightarrow 0$). $\sin(\pi x) = \sin(\pi u - \pi) = -\sin(\pi u)$ ve $x^2 + x = (u-1)u$ olduğundan

$$f(x) = \frac{-\sin(\pi u)}{(u-1)u} = \frac{\pi}{1-u} \cdot \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} \rightarrow \pi.$$

Limit var, fonksiyon tanımsız: *kaldırılabilir süreksizlik* ($f(-1) = \pi$ tanımlanırsa giderilir).

c. $|\sin(\pi x)| \leq 1$ ve $x \rightarrow -\infty$ iken $x^2 + x \rightarrow +\infty$ olduğundan

$$-\frac{1}{x^2 + x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2 + x}$$

eşitsizliğin iki yanı da 0 'a gider; sıkıştırma teoremiyle

limit 0 'dır (soldaki yatay asimptot $y=0$). Düşey asimptot için paydanın sıfır olduğu yerlere bakmak yeter: $x=-1$ 'de limit sonlu ((b)), $x=0$ 'da sonlu ((a)), $x \geq 0$ 'da payda $x^2 + 4 > 0$. Düşey asimptot yoktur.

Sık yapılan hata, paydanın sıfır olduğu her noktayı düşey asimptot saymaktır; önce limite bakılmalıdır.

CEVAP a. $a=3$, $b=4\pi$ b. kaldırılabilir (limit π) c. 0 ; düşey asimptot yok

2 TÜREV

2.1

← Soru s. 12

a. $f(9) = \frac{2}{1+3} = \frac{1}{2}$ 'dir. Kısalık için $s = \sqrt{9+h}$ diyelim. Fark bölümünde paydaları eşitleyelim:

$$\frac{f(9+h)-f(9)}{h} = \frac{\frac{2}{1+s}-\frac{1}{2}}{h} = \frac{\frac{2}{1+s}-\frac{1}{2}}{2h(1+s)}.$$

$h \rightarrow 0$ iken $s \rightarrow 3$; pay ve payda sıfıra gider ($0/0$). Payı eşleniğiyle genişletelim: $(3-s)(3+s) = 9-(9+h) = -h$. Böylece

$$\frac{f(9+h)-f(9)}{h} = \frac{-h}{2h(1+s)(3+s)} = \frac{-1}{2(1+s)(3+s)}$$

olur ve sadeleşmeden sonra $h=0$ ($s=3$) yazılabilir:

$$f'(9) = \frac{-1}{2 \cdot 4 \cdot 6} = -\frac{1}{48}.$$

Kontrol: Zincir kuralıyla $f'(x) = -\frac{2}{(1+\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$; $f'(9) = -\frac{1}{3 \cdot 16} = -\frac{1}{48}$.

b. Teğet $(9, \frac{1}{2})$ noktasından geçer ve eğimi $-\frac{1}{48}$ 'dir:

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{48}(x-9) \Rightarrow y = -\frac{x}{48} + \frac{11}{16}.$$

$y=0$ koyarsak $\frac{x}{48} = \frac{11}{16}$, yani $x=33$ bulunur.

CEVAP a. $-\frac{1}{48}$ b. $(33, 0)$ (teğet: $y = -\frac{x}{48} + \frac{11}{16}$)

2.2

← Soru s. 12

Her fonksiyon için $x=0$ 'daki fark bölümünü, yani $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h}$ ifadesini inceleyelim.

- $|x|$: $\frac{|h|}{h}$ sağdan 1 'e, soldan -1 'e gider. Tek taraflı türevler farklı: köşe.

- $\sqrt[3]{x}: \frac{h^{1/3}}{h} = h^{-2/3} \rightarrow +\infty$. Düşey teğet var, türev yok.
- $x|x|: \frac{h|h|}{h} = |h| \rightarrow 0$. İki taraftan da limit 0; $f'(0) = 0$.
- $|\sin x|: \frac{|\sin h|}{h}$ sağdan 1'e, soldan -1'e gider: köşe.
- $x^{2/3}: \frac{h^{2/3}}{h} = h^{-1/3}$ sağdan $+\infty$ 'a, soldan $-\infty$ 'a gider: sivri uç.

$x|x|$ fonksiyonu $x \geq 0$ için x^2 , $x < 0$ için $-x^2$ 'dir. İki parça $x = 0$ 'da aynı eğimle (sıfır) birleşir; mutlak değer burada bir köşe oluşturmaz.

CEVAP C

2.3

← Soru s. 13

Bölüm kuralıyla:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x+1) - (x^2+3) \cdot 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Teğet yatayken $f'(x) = 0$ olmalıdır. Payda $x \neq -1$ için sıfırdan farklı olduğundan yalnız pay sıfır olur: $x = 1$ ya da $x = -3$. Bu noktalarda $f(1) = \frac{4}{2} = 2$ ve $f(-3) = \frac{12}{-2} = -6$ 'dır.

CEVAP (1, 2) ve (-3, -6)

2.4

← Soru s. 13

a. $f(0) = b \cdot e^0 = b$ olduğundan $b = 1$ 'dir. Çarpım kuralıyla

$$f'(x) = a e^x + (ax + b) e^x = (ax + a + b) e^x,$$

yani $f'(0) = a + b$ 'dir. $f'(0) = 3$ koşulundan $a + 1 = 3$, yani $a = 2$ bulunur.

b. $f'(x) = (2x + 3) e^{x^2}$ 'i yeniden çarpım kuralıyla türetelim:

$$f''(x) = 2e^{x^2} + (2x + 3) e^{x^2} = (2x + 5) e^{x^2},$$

yani $f''(0) = 5$ 'tir.

CEVAP a. $a = 2$, $b = 1$ b. 5

2.5

← Soru s. 13

a. Türev olarak

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 30t + 63 = 3(t-3)(t-7),$$

$$a(t) = v'(t) = 6t - 30.$$

v , $t = 3$ s ve $t = 7$ s'de sıfır olur ve bu anlarda işaret değiştirir (basit kökler); cisim bu iki anda yön değiştirir.

b. Toplam yol için aralığı yön değiştirme anlarında bölmek gerekir. $s(0) = 0$, $s(3) = 81$, $s(7) = 49$, $s(8) = 56$ olduğundan:

$$\begin{aligned} &|81 - 0| + |49 - 81| + |56 - 49| \\ &= 81 + 32 + 7 = 120 \text{ m.} \end{aligned}$$

Ortalama hız ise yer değiştirmenin süreye oranıdır: $\frac{s(8) - s(0)}{8} = \frac{56}{8} = 7$ m/s. Sık yapılan hata, toplam yolu (120 m) süreye bölmektir; bu ortalama hızı değil ortalama sürati (15 m/s) verir.

c. $a = 0 \Rightarrow t = 5$ s. Bu anda $v(5) = 3(2)(-2) = -12$ m/s, sürat $|v| = 12$ m/s'dir. Sürat, v ile a zıt işaretliken azalır. İşaretler:

	(0, 3)	(3, 5)	(5, 7)	(7, 8)
v	+	-	-	+
a	-	-	+	+

Cisim (0, 3) ve (5, 7) aralıklarında yavaşlar, diğer iki aralıkta hızlanır.

CEVAP a. $v = 3(t-3)(t-7)$, $a = 6t - 30$; $t = 3$ ve 7 s b. 120 m; 7 m/s c. 12 m/s; (0, 3) ve (5, 7)

2.6

← Soru s. 14

a. $R'(x) = 120 - 0.8x$, $R'(100) = 120 - 80 = 40$ TL/bilet. 100 bilet satılmışken bir bilet daha satmak geliri yaklaşık 40 TL artırır.

b. Gerçek ek gelir

$$\begin{aligned} R(101) - R(100) &= 8039.6 - 8000 \\ &= 39.6 \text{ TL} \end{aligned}$$

$(R(101) = 12120 - 4080.4, R(100) = 12000 - 4000)$ olur. Marjinal gelir (40 TL) bu değere çok yakındır: türev, bir birimlik artışıdaki değişimin iyi bir yaklaşımıdır.

c. $R'(x) = 0 \Rightarrow x = 150$. $x < 150$ iken $R' > 0$ (gelir

artar), $x > 150$ iken $R' < 0$ (gelir azalır).

CEVAP a. $120 - 0.8x$; 40 TL b. 39.6 TL
c. $x = 150$

2.7

← Soru s. 14

Bölüm kuralıyla, $(\sin x)' = \cos x$ ve $(2 + \cos x)' = -\sin x$ kullanılarak:

$$y' = \frac{\cos x (2 + \cos x) - \sin x (-\sin x)}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2 \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}.$$

Payda hiçbir zaman sıfır olmaz ($\cos x \geq -1$). $y' = 0$ için $\cos x = -\frac{1}{2}$ olmalıdır: $x = \frac{2\pi}{3}$ ya da $x = \frac{4\pi}{3}$.

$$y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}/2}{2 - 1/2} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$y\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}/2}{3/2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

CEVAP $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ve $\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

2.8

← Soru s. 15

a. Dıştan içe üç katman var: dördüncü kuvvet, kosinüs, $3x$.

$$y' = 4 \cos^3(3x) \cdot (-\sin(3x)) \cdot 3 = -12 \cos^3(3x) \sin(3x).$$

b. Bölüm kuralı; paydanın türevi zincir kuralıyla:

$$(\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$y' = \frac{2\sqrt{x^2 + 1} - (2x + 1) \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{2(x^2 + 1) - x(2x + 1)}{(x^2 + 1)^{3/2}} = \frac{2 - x}{(x^2 + 1)^{3/2}}.$$

c. Üstel fonksiyon kendini korur, üssün türeviyle çarpılır:

$$y' = e^{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2 = 2 \cos 2x e^{\sin 2x}.$$

CEVAP a. $-12 \cos^3(3x) \sin(3x)$ b. $\frac{2 - x}{(x^2 + 1)^{3/2}}$
c. $2 \cos 2x e^{\sin 2x}$

2.9

← Soru s. 15

a. Zincir kuralı: $g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$. $x = 2$ 'de iç fonksiyonun değeri $f(2) = 1$ 'dir, bu yüzden dış türev 1'de hesaplanır:

$$g'(2) = f'(1) \cdot f'(2) = (-2)(3) = -6.$$

b. $h'(x) = f'(x^2 - 2) \cdot 2x$. $x = 2$ 'de iç değer $2^2 - 2 = 2$ 'dir:

$$h'(2) = f'(2) \cdot 4 = 12.$$

Sık yapılan hata, dış türevi iç fonksiyonun değerinde değil x 'te hesaplamaktır; (a)'da bu, yanlış olarak $f'(2) \cdot f'(2) = 9$ verir.

CEVAP a. -6 b. 12

2.10

← Soru s. 15

f 'nin formülü verilmediği hâlde her seçeneğin türevini zincir kuralıyla hesaplayabiliriz: $(f(u))' = f'(u)u'$ ve $f'(u) = \frac{\ln u}{u}$. Önce

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x^2) &= \frac{\ln x^2}{x^2} \cdot 2x = \frac{2 \ln x}{x^2} \cdot 2x \\ &= \frac{4 \ln x}{x} = 4f'(x). \end{aligned}$$

Dolayısıyla $\frac{d}{dx} [f(x^2) - 4f(x)] = 4f'(x) - 4f'(x) = 0$ olur. Diğer seçenekler:

- (A) Türev $4f'(x) - 2f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$; yalnız $x = 1$ 'de sıfırdır.
- (C) $\frac{d}{dx} f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1/x)}{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\ln x}{x}$; toplamın türevi $\frac{2 \ln x}{x}$ 'tir.
- (D) Türev $\frac{\ln 2x}{2x} \cdot 2 - \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{x}$; hiçbir yerde sıfır olmaz.
- (E) $\frac{\ln x^3}{x^3} \cdot 3x^2 = \frac{9 \ln x}{x}$; türev $\frac{6 \ln x}{x}$ 'tir.

Sık yapılan hata, f 'yi logaritma gibi düşünüp $f(x^2) = 2f(x)$ sanmak, yani (A)'yı seçmektir. İç fonksiyonun türevi $(2x)$ ile f 'nin içindeki $\ln x^2 = 2 \ln x$ çarpanı birlikte 4 katsayısını verir.

Not: $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ bu koşulu sağlar ve gerçekten $f(x^2) = \frac{1}{2}(2 \ln x)^2 = 4f(x)$ 'tir.

CEVAP B