KALKÜLÜS 2

ÇALIŞMA KİTABI

10 ünite · 162 soru · adım adım çözümler

Ertan Sinan Şahin

ertansinansahin.com

ÖRNEK SAYFALAR · Kitabın tamamı: ertansinansahin.com/product/kalkulus-2-calisma-kitabi

5. ÜNİTE
İNTEGRASYON UYGULAMALARI

video izle

dilimleme	$V = \int_a^b A(x)\,dx$	dönel yüzey alanı	$S = 2\pi \int (\text{yarıçap})\,ds$
pul yöntemi	$V = \pi \int_a^b \left(R^2 - r^2\right) dx$	iş	$W = \int_a^b F(x)\,dx$
kabuk yöntemi	$V = 2\pi \int_a^b (\text{yarıçap})(\text{yükseklik})\,dx$	kütle merkezi	$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$
eğri uzunluğu	$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$	Pappus	$V = 2\pi\rho A, \quad S = 2\pi\rho L$

Dilimleme: disk ve pul yöntemleri

5.1

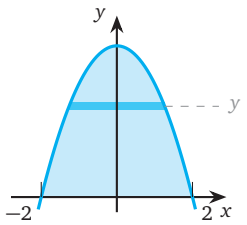
★★☆ Çözüm → s. 91

Bir cismin tabanı, xy düzleminde $y = 4 - x^2$ parabolü ile x ekseni arasında kalan bölgedir. Cismin y eksenine dik her kesiti, tabanı bu bölgenin içinde kalan yatay bir doğru parçası olan bir şekildir. Kesitler

a. kare ise,

b. çapı bu doğru parçası olan yarım daire ise

cismin hacmini bulunuz.



5.2

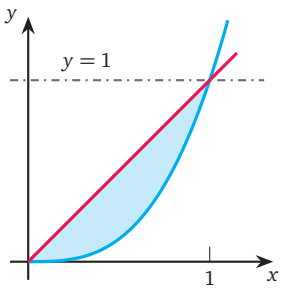
★☆☆ Çözüm → s. 91

$y = \sec x$ eğrisi ile $y = 1$ doğrusu arasında kalan ve $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ aralığında bulunan bölge x ekseni etrafında döndürülüyor. Oluşan cismin hacmini bulunuz.

ÖRNEK SAYFALAR · Kitabın tamamı: ertansinansahin.com/product/kalkulus-2-calisma-kitabi

5.3

★★☆ Çözüm → s. 91



Birinci bölgede $y = x$ doğrusu ile $y = x^3$ eğrisi arasında kalan bölge veriliyor.

a. Bölge $y = 1$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Oluşan cismin hacmini bulunuz.

b. Bölge y ekseni etrafında döndürülüyor. Hacmi pul yöntemiyle bulunuz.

ÖRNEK SAYFALAR · Kitabın tamamı: ertansinansahin.com/product/kalkulus-2-calisma-kitabi

Silindirik kabuklar

5.4 ★★☆ Çözüm → s. 91

$y = \dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ eğrisi, x ekseni, y ekseni ve $x = 3$ doğrusu arasında kalan bölge y ekseni etrafında döndürülüyor.

a. Oluşan cismin hacmini kabuk yöntemiyle bulunuz.

b. Aynı hacmi y'ye göre disk ve pul yöntemleriyle hesaplayarak sonucu doğrulayınız. Bu yolun neden daha zahmetli olduğunu açıklayınız.

5.5 ★★☆ Çözüm → s. 92

$y = 1/x$ eğrisi, $y = 1$ doğrusu ve $x = 3$ doğrusu arasında kalan R bölgesi $x = 4$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Oluşan cismin hacmi aşağıdakilerden hangisidir?

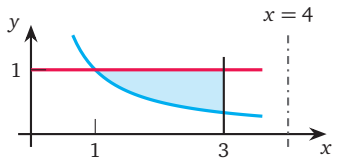
A) $2\pi \displaystyle\int_1^3 (x+4)\left(1-\frac{1}{x}\right)dx$

B) $2\pi \displaystyle\int_1^3 \frac{4-x}{x}\,dx$

C) $2\pi \displaystyle\int_1^3 (4-x)\left(1-\frac{1}{x}\right)dx$

D) $\pi \displaystyle\int_{1/3}^1 \left[1-\left(4-\frac{1}{y}\right)^2\right]dy$

E) $\pi \displaystyle\int_1^3 \left(1-\frac{1}{x}\right)^2 dx$



ÖRNEK SAYFALAR · Kitabın tamamı: ertansinansahin.com/product/kalkulus-2-calisma-kitabi

ÇÖZÜMLER

5 İNTEGRASYON UYGULAMALARI

5.1

← Soru s. 4

Kesitler y eksenine dik olduğundan y'ye göre integral alınır. y yüksekliğindeki yatay doğru parçasının uçları $4-x^2=y$ denkleminden $x=\pm\sqrt{4-y}$'dir. Kesitin tabanının uzunluğu $s(y)=2\sqrt{4-y}$, $0\le y\le 4$'tür.

a. Kare kesitin alanı $A(y)=s^2=4(4-y)$'dir:

$$V=\int_0^4 4(4-y)\,dy=4\Big[4y-\frac{y^2}{2}\Big]_0^4=32.$$

b. Yarım dairenin yarıçapı $\frac{s}{2}=\sqrt{4-y}$'dir; alanı $A(y)=\frac{\pi}{2}(4-y)$ olur:

$$V=\frac{\pi}{2}\int_0^4 (4-y)\,dy=\frac{\pi}{2}\cdot 8=4\pi.$$

Kontrol: Her yükseklikte yarım daire alanı kare alanının $\frac{\pi}{8}$'idir; hacimler de aynı oranda olmalıdır: $32\cdot\frac{\pi}{8}=4\pi$.

CEVAP a. 32 b. 4π

5.2

← Soru s. 4

Bölge eksene değmez; x eksenine dik kesitler pul (ortası delik disk) biçimindedir. $0\le x\le\frac{\pi}{3}$ aralığında $\sec x\ge 1$ olduğundan dış yarıçap $R=\sec x$, iç yarıçap $r=1$'dir:

$$V=\pi\int_0^{\pi/3}\left(\sec^2 x-1\right)dx=\pi\Big[\tan x-x\Big]_0^{\pi/3}$$
$$=\pi\Big(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\Big)\approx 2.15.$$

Sık yapılan hata, integrale $(R-r)^2=(\sec x-1)^2$ yazmaktır. Pulun alanı $\pi R^2-\pi r^2$'dir, $\pi(R-r)^2$ değil.

CEVAP $\pi\big(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\big)\approx 2.15$

5.3

← Soru s. 5

$0\le x\le 1$ aralığında $x^3\le x$'tir; bölgenin üstünde doğru, altında eğri vardır.

a. Eksen $y=1$ bölgenin üstündedir. x noktasındaki dik kesit bir puldur. Eksene uzak olan sınır alttaki eğridir: $R=1-x^3$, $r=1-x$.

$$V=\pi\int_0^1\Big[(1-x^3)^2-(1-x)^2\Big]dx$$
$$=\pi\int_0^1\left(2x-x^2-2x^3+x^6\right)dx$$
$$=\pi\Big(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\Big)=\frac{13\pi}{42}.$$

b. y eksenine dik kesitler alınır; sınırlar x'e göre yazılır. y yüksekliğinde bölge $x=y$'den $x=y^{1/3}$'e uzanır: $R=y^{1/3}$, $r=y$.

$$V=\pi\int_0^1\left(y^{2/3}-y^2\right)dy=\pi\Big(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\Big)=\frac{4\pi}{15}.$$

Kontrol: Kabuk yöntemiyle $2\pi\int_0^1 x\,(x-x^3)\,dx=2\pi\big(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\big)=\frac{4\pi}{15}$.

CEVAP a. $\frac{13\pi}{42}$ b. $\frac{4\pi}{15}$

5.4

← Soru s. 6

a. Eksene paralel (düşey) şeritler silindirik kabuk üretir: yarıçap x, yükseklik $\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$.

$$V=2\pi\int_0^3\frac{x\,dx}{\sqrt{25-x^2}}.$$

$u=25-x^2$, $du=-2x\,dx$ dönüşümüyle sınırlar 25 ve 16 olur:

$$V=\pi\int_{16}^{25}u^{-1/2}\,du=\pi\Big[2\sqrt{u}\Big]_{16}^{25}=2\pi(5-4)=2\pi.$$

b. Eğri $x=0$'da $y=\frac{1}{5}$'den $x=3$'te $y=\frac{1}{4}$'e yükselir. Yatay dilimler iki türlüdür:

- $0\le y\le\frac{1}{5}$: dilim y ekseninden $x=3$'e kadar uzanır; disk yarıçapı 3'tür.
- $\frac{1}{5}\le y\le\frac{1}{4}$: dilim eğriden $x=3$'e uzanır; pulun

ertansinansahin.com

ÖRNEK SAYFALAR · Kitabın tamamı: ertansinansahin.com/product/kalkulus-2-calisma-kitabi

iç yarıçapı için $x^2 = 25 - \frac{1}{y^2}$.

$$V = \pi \cdot 9 \cdot \frac{1}{5} + \pi \int_{1/5}^{1/4} \left(9 - 25 + \frac{1}{y^2}\right) dy$$
$$= \frac{9\pi}{5} + \pi\Big[-16y - \frac{1}{y}\Big]_{1/5}^{1/4}$$
$$= \frac{9\pi}{5} + \pi\Big(-8 + \frac{41}{5}\Big) = \frac{9\pi}{5} + \frac{\pi}{5} = 2\pi.$$

Bu yolda eğriyi $x = g(y)$ biçiminde yazmak, bölgeyi ikiye bölmek ve ikinci parçada pul kullanmak gerekir. Kabuk yönteminde ise tek integral yeter.

CEVAP a. 2π b. 2π (iki parçalı integral)

5.5

← Soru s. 6

$1 \le x \le 3$ aralığında $\frac{1}{x} \le 1$'dir; bölgenin üstünde doğru, altında eğri vardır. Eksen düşey olduğundan düşey şeritler kabuk üretir. x'teki şeridin yüksekliği $1 - \frac{1}{x}$, eksene uzaklığı $4 - x$'tir (eksen bölgenin sağındadır):

$$V = 2\pi \int_1^3 (4 - x)\Big(1 - \frac{1}{x}\Big) dx.$$

- (A) yarıçapı $x + 4$ alır; bu, $x = -4$ ekseni içindir.
- (B) yüksekliği $\frac{1}{x}$ alır; bu, eğrinin altında kalan bölgeyi döndürür.
- (D) pul yöntemidir ama yarıçaplar yer değiştirmiştir. y yüksekliğinde R bölgesi $x = \frac{1}{y}$'den $x = 3$'e uzanır. Eksene uzak yarıçap $R = 4 - \frac{1}{y}$, yakın yarıçap $r = 4 - 3 = 1$'dir. (D)'nin integrandı negatiftir.
- (E) $y = 1$ doğrusu etrafındaki disk hacmidir.

(C)'deki integrali hesaplayalım:

$$V = 2\pi \int_1^3 \Big(5 - x - \frac{4}{x}\Big) dx$$
$$= 2\pi\,(10 - 4 - 4\ln 3) = 4\pi(3 - 2\ln 3) \approx 10.09.$$

Kontrol: Doğru pul integrali aynı değeri verir:

$$V = \pi \int_{1/3}^{1} \Big[\Big(4 - \frac{1}{y}\Big)^2 - 1\Big] dy$$
$$= \pi \int_{1/3}^{1} \Big(15 - \frac{8}{y} + \frac{1}{y^2}\Big) dy$$
$$= \pi\,(10 - 8\ln 3 + 2) = 4\pi(3 - 2\ln 3).$$

CEVAP C

5.6

← Soru s. 7

Düşey eksenlerde kabuk, yatay eksende disk yöntemi tek integralle sonuç verir.

a. Yarıçap x, yükseklik $\frac{8}{x^3}$:

$$V = 2\pi \int_1^2 x \cdot \frac{8}{x^3}\, dx = 16\pi\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^2 = 8\pi.$$

b. Yarıçap $x + 1$:

$$V = 16\pi \int_1^2 \Big(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\Big) dx$$
$$= 16\pi\Big(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\Big) = 14\pi.$$

Kontrol: Eksen 1 birim uzaklaşınca her kabuğun yarıçapı 1 artar; hacim $2\pi \cdot 1 \cdot A$ kadar büyür. Bölgenin alanı $A = \int_1^2 8x^{-3}\, dx = 3$'tür ve $14\pi - 8\pi = 6\pi = 2\pi \cdot 3$.

c. Diskin yarıçapı $\frac{8}{x^3}$'tür:

$$V = \pi \int_1^2 \frac{64}{x^6}\, dx = \frac{64\pi}{5}\Big(1 - \frac{1}{32}\Big) = \frac{62\pi}{5}.$$

CEVAP a. 8π b. 14π c. $\frac{62\pi}{5}$

5.7

← Soru s. 8

Kalkülüsün Temel Teoremi'ne göre $y' = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$'tür ($x \ge 0$ için kökün içi pozitiftir). Buna göre

$$1 + (y')^2 = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$$

olur. $x + 2 > 0$ olduğundan kök $x + 2$'dir:

$$L = \int_0^2 (x + 2)\, dx = \Big[\frac{x^2}{2} + 2x\Big]_0^2 = 6.$$

Eğrinin formülünü bilmek gerekmedi; eğri uzunluğu yalnız türeve bağlıdır.

CEVAP 6

5.8

← Soru s. 8

a. Türev $y' = \frac{1}{2}\big(x^{1/4} - x^{-1/4}\big)$'tür. Karesini alalım:

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{1}{4}\big(x^{1/2} - 2 + x^{-1/2}\big)$$
$$= \frac{1}{4}\big(x^{1/2} + 2 + x^{-1/2}\big)$$
$$= \Big[\frac{1}{2}\big(x^{1/4} + x^{-1/4}\big)\Big]^2.$$

Ortadaki -2, $+2$'ye dönüştü; tam kare buradan gelir.

ertansinansahin.com

ÖRNEK SAYFALAR · Kitabın tamamı: ertansinansahin.com/product/kalkulus-2-calisma-kitabi