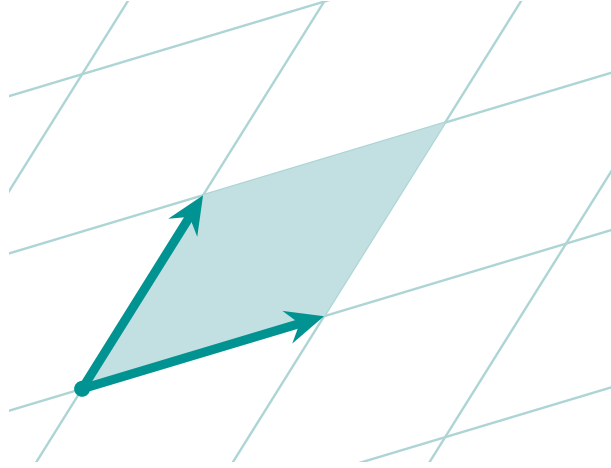


LİNEER CEBİR

ÇALIŞMA KİTABI

10 ünite · 150 soru · adım adım çözümler



Ertan Sinan Şahin



ertansinansahin.com

1. ÜNİTE

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

lineer denklem $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$

satır işlemleri $R_i \leftrightarrow R_j$, $R_i \rightarrow cR_i$ ($c \neq 0$), $R_i \rightarrow R_i + cR_j$

tutarsızlık $[0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid c]$, $c \neq 0$

çözüm sayısı 0, 1 ya da ∞

serbest değişken bilinmeyen sayısı – pivot sayısı

homojen sistem bilinmeyen sayısı > denklem sayısı $\Rightarrow$
sonsuz çözüm

Lineer denklemler ve sistemler

1.1

☆☆☆ Çözüm $\rightarrow$ s. 75

Aşağıdaki denklemlerden hangisi x , y , z değişkenlerine göre lineerdir?

A) $2^x + y = 3$

B) $(\ln 2)x - \sqrt{5}y = z + 1$

C) $xy - z = 0$

D) $x^{-1} + y + z = 4$

E) $\sqrt{x+y} = z$

1.2

☆☆☆ Çözüm $\rightarrow$ s. 75

- a. Aşağıdaki sistemin genişletilmiş matrisini yazınız ve $(1, 2, 1)$ ile $(5, 0, 0)$ üçlülerinin sistemin çözümü olup olmadığını belirleyiniz.

$$3x - y + 2z = 3$$

$$x + 4z = 5$$

$$-2y + z = -3$$

- b. Genişletilmiş matrisi $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right]$ olan sistemi x_1, x_2, x_3 bilinmeyenleriyle yazınız.

1.3



Çözüm → s. 75

Düzlemde $d_1 : x + 2y = 4$, $d_2 : 3x - y = 5$ ve $d_3 : ax + y = 3$ doğruları veriliyor.

- Üç doğrunun ortak bir noktadan geçmesi için a ne olmalıdır?
- d_3 hangi a değerleri için d_1 'e ya da d_2 'ye paraleldir?
- Diğer a değerlerinde üç denklemlili sistemin kaç çözümü vardır? Geometrik olarak yorumlayınız.

1.4



Çözüm → s. 75

Üç basamaklı bir sayının rakamları toplamı 14'tür. Yüzler basamağındaki rakam, öteki iki rakamın toplamına eşittir. Rakamların sırası ters çevrilince elde edilen sayı, ilk sayıdan 198 küçüktür. Bir lineer sistem kurarak sayıyı bulunuz.

Gauss eliminasyonu

1.5

★☆☆ Çözüm → s. 76

Aşağıdaki matrislerden hangisi indirgenmiş eşelon formdadır?

A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

1.6

★☆☆ Çözüm → s. 76

Satır işlemleriyle aşağıdaki biçimlere getirilmiş genişletilmiş matrislerin sistemlerini çözünüz. Pivot sütunlarını ve serbest değişkenleri belirtiniz.

a. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] (x_1, \dots, x_4)$

b. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right] (x_1, x_2, x_3)$

1.7

★★★ Çözüm → s. 76

Aşağıdaki sistemi Gauss eliminasyonu (eşelon forma indirgeyip geriye doğru yerine koyarak) çözünüz.

$$x + 2y - z = 3$$

$$2x + 3y + z = 10$$

$$-x + y + 4z = 9$$

ÇÖZÜMLER

1 LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

1.1

← Soru s. 4

Lineer denklemde her değişken yalnız birinci kuvvetten ve bir sabitle çarpılmış olarak geçer; değişkenler birbiriyle çarpılmaz, kök, üs ya da fonksiyon içine girmez. (B)'de katsayılar $\ln 2$ ve $-\sqrt{5}$ irrasyonel olsa da sabittir; denklem $(\ln 2)x - \sqrt{5}y - z = 1$ biçiminde yazılır.

- (A): x üstte; 2^x lineer değildir.
- (C): xy iki değişkenin çarpımıdır.
- (D): $x^{-1} = 1/x$ birinci kuvvet değildir.
- (E): değişkenler karekök içindedir.

CEVAP B

1.2

← Soru s. 4

a. Eksik değişkenin katsayısı 0 yazılır; ikinci denklemde y , üçüncüde x yoktur:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{array} \right].$$

$(1, 2, 1)$: $3 - 2 + 2 = 3 \checkmark$, $1 + 4 = 5 \checkmark$, $-4 + 1 = -3 \checkmark$; çözümdür.

$(5, 0, 0)$: birinci denklemde $15 \neq 3$; çözüm değildir. Bir üçlünün çözüm olması için bütün denklemleri sağlaması gerekir; ikinci denklemi sağlaması $(5 = 5)$ yetmez.

b. Her satır bir denklemdir; dikey çizginin sağı sağ taraftır:

$$x_1 - 2x_3 = 4, \quad 3x_2 + x_3 = 0.$$

CEVAP a. $(1, 2, 1)$ çözüm, $(5, 0, 0)$ değil
b. $x_1 - 2x_3 = 4$, $3x_2 + x_3 = 0$

1.3

← Soru s. 5

a. Önce d_1 ile d_2 'yi kesiştirelim. İkinci denklemde $y = 3x - 5$; birinciye yazarsak $x + 6x - 10 = 4$, $x = 2$, $y = 1$. Üç doğru ancak $(2, 1)$ noktası d_3 üzerindeyse ortak noktadan geçer:

$$2a + 1 = 3 \implies a = 1.$$

Bu durumda sistemin tek çözümü vardır: $(2, 1)$.

b. Eğimler: d_1 için $-\frac{1}{2}$, d_2 için 3 , d_3 için $-a$. $d_3 \parallel d_1$ için $a = \frac{1}{2}$; $d_3 \parallel d_2$ için $a = -3$. Bu değerlerde d_3 , paralel olduğu doğruyla çakışmaz (örneğin $a = \frac{1}{2}$ iken $d_3: x + 2y = 6$), yani sistemin çözümü yoktur.

c. $a \neq 1$ ise $(2, 1)$ noktası d_3 üzerinde değildir; sistemin çözümü yoktur. Paralellik yoksa doğrular ikiye ikiye üç farklı noktada kesişip bir üçgen oluşturur. **Sık yapılan hata:** "denklem sayısı bilinmeyenden fazla, o hâlde çözüm yoktur" demek; (a)'da üç denklemlilik sistemin tek çözümü vardır.

CEVAP a. $a = 1$, ortak nokta $(2, 1)$ b. $a = \frac{1}{2}$ (d_1), $a = -3$ (d_2) c. çözüm yok (üçgen)

1.4

← Soru s. 5

Rakamlar a (yüzler), b (onlar), c (birler) olsun; sayı $100a + 10b + c$, ters çevrilmiş $100c + 10b + a$ 'dır. Koşullar:

$$a + b + c = 14$$

$$a - b - c = 0$$

$$99a - 99c = 198 \implies a - c = 2.$$

İlk iki denklemi toplayalım: $2a = 14$, $a = 7$.

Üçüncüden $c = 5$, birinciden $b = 2$.

Kontrol: $7 + 2 + 5 = 14$, $7 = 2 + 5$, $725 - 527 = 198 \checkmark$.

CEVAP 725

1.5

← Soru s. 6

İndirgenmiş eşelon formun (satır basamak biçimi) koşulları: sıfır satırlar en altta; her satırın ilk sıfırdan farklı girdisi 1 (pivot); alttaki satırın pivotu daha sağda; pivot sütununda pivot dışındaki bütün girdiler 0.

- (A): üçüncü satırın pivotu (2. sütun), ikinci satırın pivotundan (3. sütun) solda.
- (B): ikinci satırın ilk girdisi 2, pivot 1 değil.
- (C): eşelon formdadır ama 4. sütundaki pivotun üstünde 5 var; indirgenmiş değil.
- (D): bütün koşullar sağlanır. 3. sütunda pivot yoktur; oradaki 3 ve -1 serbest.
- (E): sıfır satırı en üstte.

CEVAP D

1.6

← Soru s. 6

a. Pivotlar 1. ve 3. sütunlarda; x_2 ve x_4 serbesttir:
 $x_2 = s$, $x_4 = t$. Satırlardan

$$x_3 - x_4 = 4, \quad x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 1$$

olur. Buradan

$$x_1 = 1 + 2s - 3t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = 4 + t, \quad x_4 = t.$$

Sıfır satırı ($0 = 0$) bilgi taşımaz. Sistemin sonsuz çözümü vardır.

b. Son satır $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 5$ demektir; bu hiçbir zaman sağlanmaz. Sistem tutarsızdır. **Sık yapılan hata:** üstteki satırlardan geri yerine koyup "çözüm" yazmak; önce tutarsız satır aranır.

CEVAP a. $(1 + 2s - 3t, s, 4 + t, t)$ b. çözüm yok

1.7

← Soru s. 6

Genişletilmiş matrisle başlayalım. $R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$,
 $R_3 \rightarrow R_3 + R_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 10 \\ -1 & 1 & 4 & 9 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 12 \end{array} \right].$$

$R_3 \rightarrow R_3 + 3R_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 12 & 24 \end{array} \right].$$

Geriye doğru: $12z = 24 \Rightarrow z = 2$; $-y + 6 = 4 \Rightarrow y = 2$;
 $x + 4 - 2 = 3 \Rightarrow x = 1$.

Kontrol: $-1 + 2 + 8 = 9 \checkmark$ (üçüncü denklem). Pivotlar 1, -1 , 12; eşelon formda pivotların 1 olması gerekmez, indirgenmiş formda gerekir.

CEVAP $(x, y, z) = (1, 2, 2)$

1.8

← Soru s. 7

$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$, $R_3 \rightarrow R_3 - R_1$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -4 \end{array} \right].$$

$R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2$, ardından $R_3 \rightarrow -R_3$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right].$$

Yukarı doğru: $R_2 \rightarrow R_2 - R_3$, $R_2 \rightarrow -R_2$, sonra $R_1 \rightarrow R_1 - R_2$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right].$$

Pivotlar 1., 2. ve 4. sütunlarda; $x_3 = t$ serbesttir:

$$x_1 = 3 - 2t, \quad x_2 = 1 + t, \quad x_3 = t, \quad x_4 = -2.$$

Kontrol ($t = 0, (3, 1, 0, -2)$): $3 + 1 = 4$, $6 + 1 - 2 = 5$,
 $3 - 1 - 2 = 0 \checkmark$. Not: x_4 her çözümde -2 'dir; serbest değişken yalnız x_3 'tür.

CEVAP $(3 - 2t, 1 + t, t, -2)$, $t \in \mathbb{R}$