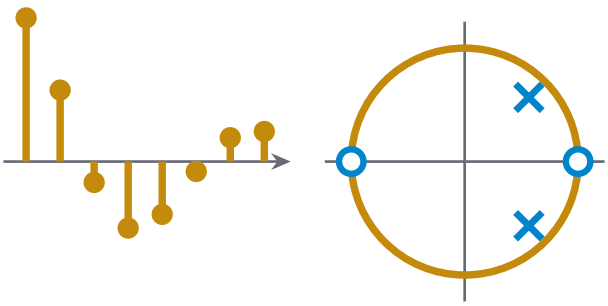
SAYISAL SİNYAL İŞLEME

SORU KİTABI

ÖRNEK SAYFALAR

8 ünite · 144 soru · adım adım çözümler



Ertan Sinan Şahin

ertansinansahin.com

Bu kitap nasıl kullanılır?

- Her ünite, soruların dayandığı tanım ve formülleri özetleyen bir hatırlatma kutusuyla açılır.
- Zorluk: ★☆☆ temel ★★☆ orta ★★★ ileri. Her ünitede birkaç çoktan seçmeli kavram sorusu vardır; ünitenin son sorusu, birden çok konuyu birleştiren sınav tipi bir karma sorudur.
- Her sorunun altındaki noktalı alan sizin çözümünüz içindir. Önce kendiniz çözün; takıldığınızda hatırlatma kutusuna ve ders notuna dönün, çözüme en son bakın.
- Bütün çözümler kitabın sonundadır. Sorunun yanındaki Çözüm → bağlantısı çözüme, çözümdeki ← Soru bağlantısı soruya götürür. Kısa cevaplar **CEVAP** kutusundadır.
- **Ortak üniteler:** Ünite 7–9 (ayrık zamanlı Fourier dönüşümü, örnekleme, z dönüşümü) *Sinyaller ve Sistemler* kitabındakilerle aynıdır. İkinci dersi bu konularla başlayan okullar için buraya alınmıştır; birinci derste işleyenler için tekrar niteliğindedir. Kitap Ünite 7 ile başlar: önceki ünitelerden yalnız konvolüsyon ve sürekli zamanlı Fourier dönüşümü bilinir kabul edilir ve gerektiği yerde hatırlatma kutusunda kısaca verilir.
- **Vize ve final:** Vize çoğunlukla ayrık zamanlı Fourier dönüşümü, örnekleme, z dönüşümü ve ayrık Fourier dönüşümüne (Ünite 7–10) kadardır; final FFT ve spektrum analizini, ayrık sistem yapılarını ve nicemlemeyi, IIR ve FIR filtre tasarımını (Ünite 11–14) kapsar. Konu seçimi okuldan okula değişir; kendi dersinizin izlencesine göre çalışacağınız üniteleri seçin. Bazı üniversitelerde bu dersin adı Sayısal İşaret İşleme'dir.

İçindekiler

Sayfa numaraları tam kitaba aittir. Renkli üniteler bu örnekte vardır; tıklayınca o üniteye gidersiniz.

7 **Ayrık Zamanlı Fourier Dönüşümü** ..... 18 soru 4

8 Örnekleme ..... 16 soru 13

9 z Dönüşümü ..... 20 soru 21

10 **Ayrık Fourier Dönüşümü** ..... 18 soru 32

11 FFT ve Spektrum Analizi ..... 16 soru 41

12 Ayrık Sistem Yapıları ve Nicemleme ..... 16 soru 51

13 **IIR Filtre Tasarımı** ..... 20 soru 61

14 FIR Filtre Tasarımı ..... 20 soru 74

Çözümler 87

7. ÜNİTE

AYRIK ZAMANLI FOURİER DÖNÜŞÜMÜ

konvolüsyon (evrişim)

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]$$

DTFT $\quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,e^{-j\omega n}$

ters DTFT $\quad x[n] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\,e^{j\omega n}\,d\omega$

öteleme, dürtü $\quad \delta[n-n_0] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega n_0}$

üstel ($|a|<1$) $\quad a^n u[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{1-a\,e^{-j\omega}}$

dikdörtgen

$$u[n]-u[n-L] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)}\,e^{-j\omega(L-1)/2}$$

ideal alçak geçiren

$$\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

karmaşık üstel $\quad e^{j\omega_0 n} \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi \displaystyle\sum_k \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)$

öteleme, modülasyon

$$x[n-n_0] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega n_0}X, \quad e^{j\omega_0 n}x[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

ters çevirme, eşlenik

$$x[-n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{-j\omega}), \quad x \text{ gerçel} : X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$$

frekansta türev $\quad n\,x[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} j\,\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

konvolüsyon $\quad x[n] * h[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$

çarpma

$$x[n]\,w[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})\,W(e^{j(\omega-\theta)})\,d\theta$$

Parseval $\quad \displaystyle\sum_n |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2\,d\omega$

sinüzoide yanıt

$$\cos(\omega_0 n) \to |H(e^{j\omega_0})|\cos\!\big(\omega_0 n + \angle H(e^{j\omega_0})\big)$$

grup gecikmesi $\quad \tau(\omega) = -\dfrac{d}{d\omega}\angle H(e^{j\omega})$

Bu ünitede sistemler doğrusal zamanla değişmezdir (DZD): sistem, dürtü yanıtı $h[n]$ ile tam olarak belirlenir ve çıkış, giriş ile dürtü yanıtının konvolüsyonudur, $y = x * h$. Sistemin frekans yanıtı $H(e^{j\omega})$, $h[n]$'nin ayrık zamanlı Fourier dönüşümüdür (DTFT). Frekans değişkeni ω ayrık frekanstır (birimi rad/örnek); DTFT 2π periyotludur, bu yüzden yalnız $-\pi < \omega \le \pi$ aralığı çizilir ve en yüksek ayrık frekans $\omega = \pi$'dir. Sonlu diziler $\{\dots\}$ içinde yazılır ve ilk elemanın indisi ayrıca belirtilir; kök grafiklerinde gösterilmeyen örnekler sıfırdır. Fark denklemleriyle verilen sistemler nedensel ve başlangıçta durgundur; blok diyagramlarında D bir örneklik gecikmedir. Kararlılık sınırlı giriş–sınırlı çıkış (SGSÇ) anlamındadır: $\sum|h[n]| < \infty$. Şekillerde verilen sinyal ve spektrumu mavi; bulunan sinyal ve spektrum, dürtü yanıtı ve frekans yanıtı kırmızı (aynı şekildeki ikinci yanıt kırmızı kesikli); ideal (hedef) yanıt gri kesikli çizilir.

DTFT ve temel çiftler

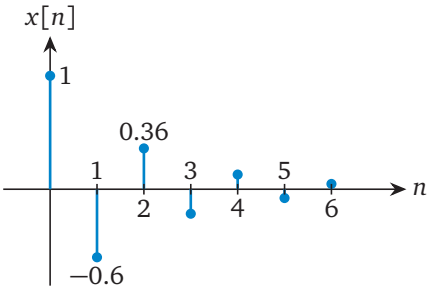
7.1 ★☆☆ Çözüm →

Aşağıdaki ayrık zamanlı sinyallerden hangisi en yüksek frekanslıdır (örnekten örneğe en hızlı salınır)?

A) $\cos(0.9\pi n)$ **B)** $\cos(1.6\pi n)$ **C)** $\cos(1.9\pi n)$ **D)** $\cos(2.2\pi n)$ **E)** $\cos(3.9\pi n)$

7.3 ★☆☆ Çözüm →

Şekildeki sinyal $x[n] = (-0.6)^n u[n]$'dir.



a. $X(e^{j\omega})$'yı bulunuz.

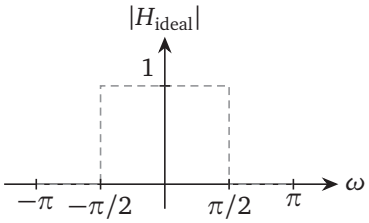
b. $|X(e^{j\omega})|$'yı $\omega = 0$, $\pi/2$ ve π'de bulunuz; $\omega = \pi/2$'deki fazı bulunuz. Sinyalin enerjisi hangi frekanslarda toplanmıştır? Neden?

c. Sinyalin enerjisini bulunuz.

Ayrık filtreler, faz ve grup gecikmesi

7.16 ★★★ Çözüm →

Kesim frekansı $\pi/2$ olan ideal alçak geçiren filtrenin 4 örnek geciktirilmiş dürtü yanıtı, $0 \le n \le 8$ aralığında kesilerek nedensel bir filtre elde ediliyor:



$$h[n] = \frac{\sin\big(0.5\pi(n-4)\big)}{\pi(n-4)}, \quad 0 \le n \le 8.$$

Şekil, yaklaşılmak istenen ideal genlik yanıtıdır.

a. $h[0], \ldots, h[8]$'i bulunuz. Dizide nasıl bir simetri vardır?

b. $H(e^{j\omega}) = e^{-j4\omega} A(\omega)$ biçiminde yazınız (A gerçel). Grup gecikmesi nedir?

c. $A(0)$, $A(\pi/2)$ ve $A(\pi)$'yi bulunuz; ideal değerlerle karşılaştırınız.

d. $x[n] = \cos(0.2\pi n) + \cos(0.8\pi n)$ girişinin çıkışını bulunuz.

10. ÜNİTE

AYRIK FOURİER DÖNÜŞÜMÜ

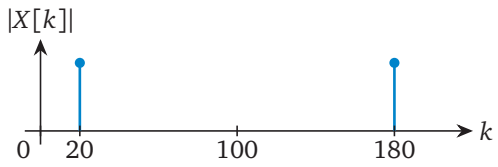
DFT	$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{kn}$	dairesel öteleme	$x[((n-m))_N] \leftrightarrow W_N^{km}X[k]$
ters DFT	$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]W_N^{-kn}$	frekansta öteleme	$W_N^{-ln}x[n] \leftrightarrow X[((k-l))_N]$
karmaşık üstel çarpan	$W_N=e^{-j2\pi/N},\quad W_N^N=1$	gerçel $x[n]$	$X[((-k))_N]=X^*[k]$
DTFT	$X(e^{j\omega})=\sum_n x[n]e^{-j\omega n}$	Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1}\lvert x[n]\rvert^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\lvert X[k]\rvert^2$
DTFT örnekleri	$X[k]=X(e^{j\omega})\big\rvert_{\omega=2\pi k/N}$	dairesel konvolüsyon	$x_1 \circledast_N x_2 \leftrightarrow X_1X_2$
DFT çizgisi	$\omega_k=\frac{2\pi k}{N},\quad f_k=\frac{kf_s}{N}$	($\circledast_N$ tanımı)	$\sum_{m=0}^{N-1}x_1[m]\,x_2[((n-m))_N]$
		zamanda örtüşme	$y_N[n]=\sum_r y[n+rN]$
		doğrusal = dairesel konvolüsyon toplamı	$N \geq L+M-1$ $y[n]=\sum_k x[k]h[n-k]$

Bu ünitede DFT N noktalıdır: diziler $0 \leq n \leq N-1$, DFT değerleri $0 \leq k \leq N-1$ aralığında tanımlıdır. Her k, $f_k = kf_s/N$ frekansındaki bir DFT çizgisidir; çizgi aralığı $\Delta f = f_s/N$'dir. Sonlu diziler $\{\ldots\}$ içinde, aksi söylenmedikçe $n=0$'dan başlayarak yazılır; kök grafiklerinde gösterilmeyen örnekler sıfırdır. $((n))_N$, n'nin N'ye bölümünden kalandır ($((-1))_8 = 7$). $x_1[n] \circledast_N x_2[n]$, N noktalı dairesel konvolüsyondur (evrişim); $x[n] * h[n]$ ise doğrusal konvolüsyondur. L ve M, konvolüsyona giren iki dizinin uzunluklarıdır. Dairesel konvolüsyon, doğrusal sonucun N'lik kaymalarla üst üste toplanmış hâlidir; buna zamanda örtüşme (time aliasing) denir. Frekans hertz cinsinden f, örnekleme frekansı f_s ile gösterilir; ayrık zamanlı açısal frekans $\omega = 2\pi f/f_s$'dir (birimi rad/örnek). Şekillerde giriş mavi, dürtü yanıtı kırmızı çizilir.

DFT'nin tanımı ve DTFT ile ilişkisi

10.1 ★☆☆ Çözüm →

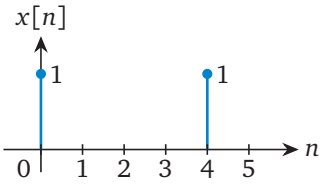
Bir dağıtım trafosunun uğultusunu kaydeden mikrofonun sinyali, 500 Hz'in üstünü kesen bir örtüşme önleyici filtreden geçirildikten sonra $f_s = 1$ kHz ile örnekleniyor ve kaydın $N = 200$ noktalı DFT'si alınıyor. $0 \leq k \leq 199$ aralığında $|X[k]|$ yalnız $k = 20$ ve $k = 180$'de belirgin bir değer alıyor (şekil); öteki k'lerde ihmal edilebilecek kadar küçük kalıyor. Uğultunun frekansı nedir?



A) 20 Hz **B)** 100 Hz ve 900 Hz **C)** 100 Hz **D)** 900 Hz **E)** 50 Hz

10.3 ★★☆ Çözüm →

Şekildeki $x[n] = \delta[n] + \delta[n-4]$ dizisi veriliyor.



a. $X(e^{j\omega})$'yı bulunuz; $|X(e^{j\omega})| = 2|\cos 2\omega|$ olduğunu gösteriniz. $0 \le \omega < 2\pi$ aralığındaki sıfırları nelerdir?

b. 5 noktalı DFT $X_5[k]$'yi tanımdan hesaplayınız; $|X_5[k]|$ değerlerinin $|X(e^{j\omega})|$'nın örnekleri olduğunu gösteriniz.

c. $x[n]$'ye sıfır eklenerek N noktalı DFT alınıyor ($N \ge 5$). DFT çizgilerinden birinin $|X(e^{j\omega})|$'nın bir sıfırına düşmesi için en küçük N nedir? Bu N için $X[k]$'yi yazınız.

Karma sorular

10.16 ★★★ Çözüm →

Bir ses işleme yazılımı, stereo kaydın gerçel sol ve sağ kanallarını, $l[n]$ ve $r[n]$'yi, tek bir karmaşık DFT ile işliyor: $z[n] = l[n] + j\,r[n]$. 4 örneklik bir parça için

$$Z[k] = \{2+6j,\ 2,\ 4-4j,\ 2j\}$$

bulunmuştur.

a. Aşağıdaki bağıntıları gösteriniz:

$$L[k] = \frac{Z[k] + Z^*[((-k))_4]}{2}, \qquad R[k] = \frac{Z[k] - Z^*[((-k))_4]}{2j}.$$

b. $L[k]$ ve $R[k]$'yi bulunuz.

c. $l[n]$ ve $r[n]$'yi bulunuz; sonucu $z[0]$ ile denetleyiniz.

13. ÜNİTE

IIR FİLTRE TASARIMI

frekanslar	$\omega = \Omega T = 2\pi f / f_s$	dürtü değişmezliği	$h[n] = T\,h_c(nT)$
dalgalanma	$1-\delta_p = 10^{-A_p/20}$		$\dfrac{A_k}{s-s_k} \to \dfrac{TA_k}{1-e^{s_k T}z^{-1}}$
zayıflatma	$\delta_s = 10^{-A_s/20}$	örtüşme	$H(e^{j\omega}) = \sum_k H_c\!\left(j\,\dfrac{\omega-2\pi k}{T}\right)$
Laplace çifti	$e^{s_k t}u(t) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{s-s_k}$	$(h_c(0^+) \neq 0$ ise)	$+\,T\,h_c(0^+)/2$
frekans yanıtı	$H_c(j\Omega) = H_c(s)\big\|_{s=j\Omega}$	bilineer dönüşüm	$s = \dfrac{2}{T}\cdot\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
kararlılık	$\mathrm{Re}\{s_k\} < 0$ (nedensel)		$z = \dfrac{1+sT/2}{1-sT/2}$
Butterworth	$\lvert H_c(j\Omega)\rvert^2 = \dfrac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}}$	frekans bükülmesi	$\Omega = \dfrac{2}{T}\tan\dfrac{\omega}{2}$
derece	$N \geq \dfrac{\log_{10} D}{2\log_{10}(\Omega_s/\Omega_p)}$	grup gecikmesi	$\tau(\omega) = -\dfrac{d}{d\omega}\angle H(e^{j\omega})$
	$D = \dfrac{10^{A_s/10}-1}{10^{A_p/10}-1}$	kutup çifti $re^{\pm j\omega_0}$	$\Delta\omega \approx 2(1-r)$ $(r \approx 1)$
kutuplar	$s_k = \Omega_c\, e^{j\pi(2k+N-1)/(2N)}$		

Bu ünitede IIR (sonsuz dürtü yanıtlı) sayısal filtreler analog prototiplerden tasarlanır; analog (sürekli zamanlı) ve sayısal (ayrık zamanlı) alan birlikte kullanılır: Ω rad/s cinsinden analog açısal frekans, ω ise rad/örnek cinsinden sayısal frekanstır; f hertz cinsinden frekans, f_s örnekleme frekansı, $T = 1/f_s$'dir. Analog filtre $H_c(s)$, sayısal filtre $H(z)$ ile gösterilir. $s = \sigma + j\Omega$, Laplace dönüşümünün karmaşık değişkenidir; nedensel analog filtre, kutuplarının hepsi s düzleminin sol yarısındaysa ($\mathrm{Re}\{s_k\} < 0$) kararlıdır. s_k formülünde $k = 1, \ldots, N$'dir. Geçirme bandı dalgalanması A_p ve durdurma bandı zayıflatması A_s desibel cinsinden artı sayılardır: geçirme bandında $20\log_{10}|H| \geq -A_p$, durdurma bandında $20\log_{10}|H| \leq -A_s$; en büyük kazanç 1'dir. Dürtü değişmezliğinde $h[n] = T\,h_c(nT)$ alınır; T çarpanı kazancı yaklaşık korur; spektrum kopyalarının üst üste binmesi (örtüşme, aliasing) küçük farklar yaratır. Şekillerde verilen sinyal mavi; dürtü yanıtı ve frekans yanıtı kırmızı, ideal yanıt gri kesikli çizilir; gri dolgu yalnız tolerans şemalarındaki yasak bölgeleri gösterir.

Tasarım şartnamesi ve analog prototipler

13.1 ★☆☆ Çözüm →

N. dereceden bir analog Butterworth alçak geçiren filtre (AGF) için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) Kesim frekansında $|H_c(j\Omega_c)| = 1/\sqrt{2}$'dir ($-3$ dB); bu her N için geçerlidir ve genlik Ω arttıkça hiç yükselmeden azalır.

B) Geçirme bandında genlik 1 ile $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$ arasında eşit dalgalanır.

C) Kutuplar yarıçapı Ω_c olan çemberin üstündedir; N tek ise kutuplardan biri $s = 0$'dadır.

D) Kesim frekansındaki zayıflatma dereceyle artar; $N = 4$ için 6 dB'dir.

E) Durdurma bandında genlik, N'den bağımsız olarak dekad başına 20 dB azalır.

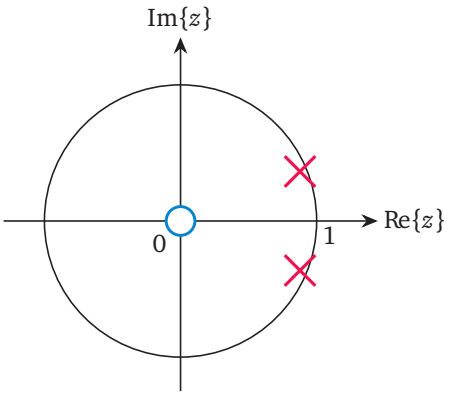
Dürtü değişmezliği

13.8 ★★☆ Çözüm →

Bir araç navigasyon sisteminin ivmeölçer kanalındaki sayısal filtre, $f_s = 200$ Hz'te analog bir prototipten dürtü değişmezliğiyle elde edilmiştir:

$$H(z) = \frac{0.1452\,z^{-1}}{1 - 1.7554\,z^{-1} + 0.9025\,z^{-2}}$$

(kutuplar ve $z = 0$'daki sıfır şekilde). Prototip $H_c(s) = K/[(s+\alpha)^2 + \beta^2]$ biçimindedir ($\alpha, \beta > 0$).



a. Kutupların yarıçapını ve açısını; α ve β'yı bulunuz.

b. K'yi bulunuz; analog ve sayısal DC kazançlarını karşılaştırınız.

c. β yerine $\beta + 2\pi/T$ alınsaydı z düzlemindeki kutuplar ne olurdu? Bu belirsizlik nasıl giderilir?

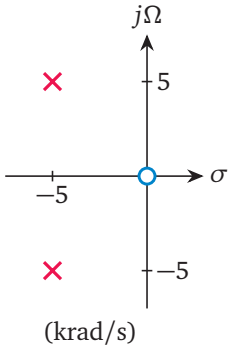
Bilineer dönüşüm ve frekans ön bükmesi

13.12 ★★☆ Çözüm →

Kutupları ve sonlu sıfırı şekilde gösterilen analog bant geçiren filtre

$$H_c(s) = \frac{10^4 s}{s^2 + 10^4 s + 5 \cdot 10^7}$$

(s rad/s) $f_s = 5$ kHz'te bilineer dönüşümle (ön bükme yapılmadan) sayısallaştırılıyor.



a. $z = (1 + sT/2)/(1 - sT/2)$ ile kutupları ve sıfırı eşleyiniz. Sayısal filtre kararlı mıdır? $s = \infty$'daki sıfır nereye düşer?

b. $H(z)$'yi bulunuz.

c. Analog tepe $\Omega_0 = \sqrt{5 \cdot 10^7}$ rad/s'dedir. Sayısal tepe hangi frekanstadır (Hz)? Tepe kazancı değişir mi?

ÇÖZÜMLER

7 AYRIK ZAMANLI FOURİER DÖNÜŞÜMÜ

7.1

← Soru

Ayrık sinüzoid ω'da 2π periyotludur: $\cos((\omega_0+2\pi k)n)=\cos(\omega_0 n)$, çünkü n tam sayıdır. Ayrıca $\cos(-\omega_0 n)=\cos(\omega_0 n)$. Her frekanstan önce 2π'nin katları çıkarılır, sonra gerekirse $\cos(-\omega_0 n)=\cos(\omega_0 n)$ ile eksi işaret atılır; böylece frekans $0\le\omega\le\pi$ aralığına iner:

ω_0	0.9π	1.6π	1.9π	2.2π	3.9π
eşdeğer	0.9π	0.4π	0.1π	0.2π	0.1π

Ayrık zamanda en yüksek frekans $\omega=\pi$'dir ($(-1)^n$); π'ye en yakın olan 0.9π'dir.

- (B): $1.6\pi=2\pi-0.4\pi$; sinyal $\cos(0.4\pi n)$'nin aynısıdır.
- (C) ve (E): İkisi de $\cos(0.1\pi n)$'dir; sürekli zamanın aksine, ayrık zamanda büyük ω_0 hızlı salınım demek değildir.
- (D): $2.2\pi-2\pi=0.2\pi$'dir.

CEVAP A

7.3

← Soru

a. $a=-0.6$, $|a|<1$: dizi mutlak toplanabilir, DTFT vardır:

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{\infty}(-0.6\,e^{-j\omega})^n=\frac{1}{1+0.6\,e^{-j\omega}}.$$

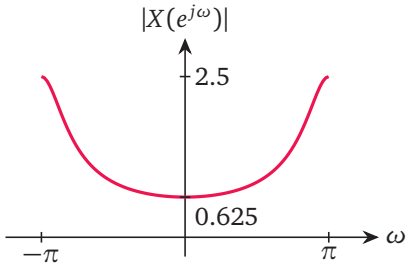
b. $|1+0.6e^{-j\omega}|^2=1.36+1.2\cos\omega$:

$$|X(e^{j0})|=\frac{1}{1.6}=0.625,\qquad |X(e^{j\pi})|=\frac{1}{0.4}=2.5,$$

$$X(e^{j\pi/2})=\frac{1}{1-0.6j},\quad |X|=\frac{1}{\sqrt{1.36}}=0.8575,$$

$$\angle X(e^{j\pi/2})=\arctan 0.6=0.5404\text{ rad }(30.96^\circ).$$

Genlik $\omega=\pi$'ye doğru büyür (şekil): enerji yüksek frekanslardadır. Örneklerin işareti her adımda değişir; $(-0.6)^n=0.6^n(-1)^n$, yani 0.6^n zarfı $\omega=\pi$'deki $(-1)^n$ ile çarpılmıştır.



c. Enerji $\sum|x[n]|^2=\sum 0.36^n$:

$$E=\frac{1}{1-0.36}=1.5625.$$

CEVAP a. $X(e^{j\omega})=1/(1+0.6e^{-j\omega})$ b. 0.625; 0.8575; 2.5; faz 0.5404 rad; enerji yüksek frekanslarda ($\omega\approx\pi$) c. $E=1.5625$

7.16

← Soru

a. $k=n-4$ ile $h=\sin(0.5\pi k)/(\pi k)$; $k=0$'da limit 0.5:

k	0	±1	±2	±3	±4
h	0.5	$1/\pi$	0	$-1/(3\pi)$	0

$1/\pi=0.3183$, $1/(3\pi)=0.1061$; $n=0,\ldots,8$ için:

$$h=\{0,-0.1061,0,0.3183,0.5,0.3183,0,-0.1061,0\}.$$

Dizi $n=4$'e göre simetriktir: $h[n]=h[8-n]$ (ör. $h[1]=h[7]=-0.1061$).

b. Simetrik çiftler $e^{-j4\omega}$ dışarı alınarak birleştirilir: $h[4\pm k]$ çifti $2h\cos(k\omega)$ verir.

$$A(\omega)=0.5+\frac{2}{\pi}\cos\omega-\frac{2}{3\pi}\cos 3\omega.$$

Faz -4ω (doğrusal; $A<0$ olan yerlerde π sıçraması), grup gecikmesi her frekansta $\tau=4$ örnektir: bütün bileşenler aynı gecikmeyle geçer, faz bozulması olmaz. ($A(\omega)$ frekansla değiştiği için genlik bozulması olur.)

c. $2/\pi=0.6366$, $2/(3\pi)=0.2122$:

$$A(0)=0.5+0.6366-0.2122=0.9244,$$

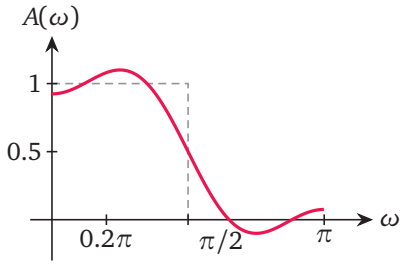
$$A(\pi/2)=0.5,$$

$$A(\pi)=0.5-0.6366+0.2122=0.0756.$$

İdealde geçirme bandında 1, durdurma bandında 0'dır. Kesme, geçirme bandında dalgalanma ve durdurma

ertansinansahin.com

bandında sızıntı bırakır (şekil); kesim frekansında kazanç yarıdır (−6 dB).



d. $\cos(0.2\pi)=0.8090$, $\cos(0.6\pi)=-0.3090$, $\cos(0.8\pi)=-0.8090$, $\cos(2.4\pi)=0.3090$:

$$A(0.2\pi)=0.5+0.6366(0.8090)-0.2122(-0.3090)=1.0806,$$

$$A(0.8\pi)=0.5-0.6366(0.8090)-0.2122(0.3090)=-0.0806.$$

$$y[n]=1.0806\cos\big(0.2\pi(n-4)\big)-0.0806\cos\big(0.8\pi(n-4)\big).$$

Geçirme bandındaki bileşen %8 yükseltilmiş, durdurma bandındaki bileşen %8'e indirilmiştir (işareti ters); ikisi de 4 örnek gecikir.

CEVAP a. $h[4]=0.5$, $h[3]=h[5]=0.3183$, $h[1]=h[7]=-0.1061$, öteki örnekler 0; $h[n]=h[8-n]$ b. $A(\omega)=0.5+(2/\pi)\cos\omega-(2/(3\pi))\cos 3\omega$; $\tau=4$ c. $A(0)=0.9244$, $A(\pi/2)=0.5$, $A(\pi)=0.0756$ d. $y[n]=1.0806\cos(0.2\pi(n-4))-0.0806\cos(0.8\pi(n-4))$

10 AYRIK FOURİER DÖNÜŞÜMÜ

10.1

← Soru

DFT çizgi aralığı $\Delta f=f_s/N=1000/200=5$ Hz'tir; k. çizgi $f_k=kf_s/N$ frekansına karşılık gelir:

$$f_{20}=20(5)=100\text{ Hz},\qquad f_{180}=180(5)=900\text{ Hz}.$$

Ama örtüşme önleyici filtre 500 Hz'in üstünü kestiği için kayıtta 900 Hz'lik bir bileşen olamaz. Gerçel bir dizide $X[N-k]=X^*[k]$ olduğundan $k=180=200-20$ çizgisi, $k=20$'nin eşlenik eşidir: kosinüsün $e^{-j\omega n}$ yarısına, yani −100 Hz'e $((180-200)\cdot 5)$ karşılık gelir. Kayıtta yalnız bir bileşen vardır: 100 Hz (şebeke frekansının iki katı; trafo çekirdeğinin titreşimi).

- (A): İndis k doğrudan hertz sanılmıştır.
- (B): $k=180$ ayrı bir bileşen sayılmıştır; eşlenik simetri unutulmuştur.
- (D): Yalnız eşlenik (ayna) çizgi alınmıştır; 900 Hz, filtrenin kestiği bölgededir.
- (E): $f=(k/N)(f_s/2)$ alınmıştır; DFT'nin N çizgisi 0'dan f_s'ye yayılır ($f_s/2$'ye değil).

CEVAP C

10.3

← Soru

a. Ötelenmiş dürtünün DTFT'si $e^{-j\omega n_0}$'dır:

$$X(e^{j\omega})=1+e^{-j4\omega}=e^{-j2\omega}\big(e^{j2\omega}+e^{-j2\omega}\big)=2\cos(2\omega)\,e^{-j2\omega}.$$

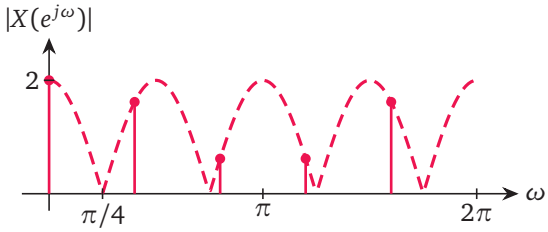
$|e^{-j2\omega}|=1$ olduğundan $|X(e^{j\omega})|=2|\cos 2\omega|$. Sıfırlar $\cos 2\omega=0$, yani $2\omega=\pi/2+m\pi$ noktalarındadır:

$$\omega=\pi/4,\quad 3\pi/4,\quad 5\pi/4,\quad 7\pi/4.$$

b. $X_5[k]=\sum_n x[n]W_5^{kn}=1+W_5^{4k}=1+e^{j2\pi k/5}$ ($W_5^{5k}=1$). $|1+e^{j\theta}|=2|\cos(\theta/2)|$ ile:

$$|X_5[k]|=2\left|\cos\frac{\pi k}{5}\right|:\quad 2,\ 1.618,\ 0.618,\ 0.618,\ 1.618.$$

DTFT'nin $\omega_k=2\pi k/5$'teki değeri $2|\cos(4\pi k/5)|$'tir; $k=1$'de $2|\cos 144^\circ|=1.618$, $k=2$'de $2|\cos 288^\circ|=0.618$: aynı sayılar. $N\geq 5$ (dizinin uzunluğu) olduğundan DFT değerleri, DTFT'nin tam örnekleridir (şekil).



Kökler 5 noktalı DFT'nin genlikleridir; hepsi kesikli DTFT eğrisinin üstündedir.

c. k. DFT çizgisi $\omega_k=2\pi k/N$'dedir; bir sıfıra düşmesi için $2\pi k/N=(2m+1)\pi/4$, yani $k/N=(2m+1)/8$ olmalıdır. Pay tek sayı olduğundan bu kesir sadeleşmez; N, 8'in katı olmak

ertansinansahin.com

zorundadır. En küçük $N = 8$'dir ($k = 1$: $\omega = \pi/4$). $X_8[k] = 1 + W_8^{4k} = 1 + (-1)^k$:

$$X_8[k] = \{2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, 0\}.$$

Tek indisli çizgiler ($\pi/4, 3\pi/4, \ldots$) tam sıfırlara düşer.

CEVAP a. $X(e^{j\omega}) = 2\cos(2\omega)e^{-j2\omega}$; sıfırlar $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$, $7\pi/4$ b. $X_5[k] = 1 + e^{j2\pi k/5}$; $|X_5[k]| = 2, 1.618, 0.618, 0.618, 1.618$ c. $N = 8$; $X_8[k] = \{2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, 0\}$

10.16

← Soru

a. $l = (z + z^*)/2$ ve $r = (z - z^*)/(2j)$'dir. $z^*[n]$'nin DFT'si:

$$\sum_n z^*[n] W_N^{kn} = \Big(\sum_n z[n] W_N^{-kn}\Big)^* = Z^*[((-k))_N].$$

Doğrusallıkla iki bağıntı çıkar. $((-k))_4$: $k = 0, 1, 2, 3$ için $0, 3, 2, 1$.)

b. $Z^*[((-k))_4] = \{2 - 6j,\ -2j,\ 4 + 4j,\ 2\}$:

$$L[k] = \tfrac{1}{2}\{4,\ 2 - 2j,\ 8,\ 2 + 2j\} = \{2,\ 1 - j,\ 4,\ 1 + j\},$$

$$R[k] = \tfrac{1}{2j}\{12j,\ 2 + 2j,\ -8j,\ -2 + 2j\}$$
$$= \{6,\ 1 - j,\ -4,\ 1 + j\}.$$

İkisi de gerçel bir dizinin DFT'sine uyar: $k = 0, 2$ gerçel, $k = 1, 3$ eşleniktir.

c. Ters DFT'de $W_4^{-kn} = j^{kn}$'dir; $1 - j$ ve $1 + j$ terimleri eşlenik olduğundan toplamları $2\,\mathrm{Re}\{(1 - j)j^n\}$'dir: $n = 0, 1, 2, 3$ için $2, 2, -2, -2$.

$$l[n] = \tfrac{1}{4}\big[2 + 4(-1)^n + 2\,\mathrm{Re}\{(1 - j)j^n\}\big],$$

$$l[n] = \tfrac{1}{4}\{8, 0, 4, -4\} = \{2, 0, 1, -1\},$$

$$r[n] = \tfrac{1}{4}\big[6 - 4(-1)^n + 2\,\mathrm{Re}\{(1 - j)j^n\}\big],$$

$$r[n] = \tfrac{1}{4}\{4, 12, 0, 8\} = \{1, 3, 0, 2\}.$$

Kontrol: $z[0] = l[0] + j\,r[0] = 2 + j$; ters DFT'den $z[0] = \frac{1}{4}\sum Z[k] = \frac{1}{4}(8 + 4j) = 2 + j$.

İki gerçel dizinin DFT'si, bir karmaşık DFT ve birkaç toplamayla elde edilir; işlem yükü yaklaşık yarıya iner.

CEVAP a. $z^*[n] \leftrightarrow Z^*[((-k))_4]$
b. $L[k] = \{2, 1 - j, 4, 1 + j\}$,
$R[k] = \{6, 1 - j, -4, 1 + j\}$ c. $l[n] = \{2, 0, 1, -1\}$,
$r[n] = \{1, 3, 0, 2\}$; $z[0] = 2 + j$

13 IIR FİLTRE TASARIMI

13.1

← Soru

$\Omega = \Omega_c$'de $|H_c|^2 = 1/(1 + 1^{2N}) = 1/2$'dir; N ne olursa olsun $20\log_{10}(1/\sqrt{2}) = -3.01$ dB. $(\Omega/\Omega_c)^{2N}$, $\Omega > 0$ için artan olduğundan $|H_c|$ tekdüze (monoton) azalır: geçirme bandında dalgalanma yoktur, $\Omega = 0$'da en düzdür.

- (B): Eşit dalgalanma Chebyshev I filtresinin özelliğidir.
- (C): N tek ise $k = (N+1)/2$ kutbunun açısı π'dir: kutup $s = -\Omega_c$'dedir. $s = 0$'daki bir kutup $j\Omega$ ekseninde olurdu; filtre kararlı olmazdı.
- (D): Kesimdeki değer her N için 3.01 dB'dir; derece yalnız geçişin dikliğini değiştirir.
- (E): $\Omega \gg \Omega_c$'de $|H_c| \approx (\Omega_c/\Omega)^N$; eğim dekad başına $20N$ dB'dir.

CEVAP A

13.8

← Soru

a. $h_c(t) = (K/\beta)e^{-\alpha t}\sin(\beta t)u(t)$ (kutuplar $-\alpha \pm j\beta$). Örneklenince $h[n] = T(K/\beta)\,r^n \sin(\theta n)u[n]$, $r = e^{-\alpha T}$, $\theta = \beta T$; z dönüşümünün paydası $1 - 2r\cos\theta\, z^{-1} + r^2 z^{-2}$'dir:

$$r^2 = 0.9025 \Rightarrow r = 0.95,$$

$$\cos\theta = \frac{1.7554}{2(0.95)} = 0.9239 \Rightarrow \theta = 0.3927 = \pi/8.$$

$T = 5$ ms:

$$\alpha = \frac{-\ln 0.95}{T} = \frac{0.05129}{0.005} = 10.26\ \mathrm{s}^{-1},$$

$$\beta = \frac{\theta}{T} = \frac{0.3927}{0.005} = 78.54\ \mathrm{rad/s}\ (12.5\ \mathrm{Hz}).$$

b. Pay $T(K/\beta)\,r\sin\theta = 0.1452$; $\sin(\pi/8) = 0.3827$:

$$K = \frac{0.1452 \cdot 78.54}{0.005 \cdot 0.95 \cdot 0.3827} = \frac{11.404}{0.0018177} = 6274.$$

$$H_c(0) = \frac{K}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{6274}{105.3 + 6168.5} = 1.000,$$

$$H(e^{j0}) = \frac{0.1452}{1 - 1.7554 + 0.9025} = \frac{0.1452}{0.1471} = 0.987.$$

Fark (-0.11 dB) küçüktür: kutup frekansı 12.5 Hz, Nyquist frekansı 100 Hz'tir; örtüşme azdır.

ertansinansahin.com

c. $\beta' = 78.54 + 2\pi(200) = 1335.2$ rad/s (212.5 Hz): $\theta' = \beta' T = \pi/8 + 2\pi$, kutuplar aynı kalır. e^{sT}, s'nin sanal kısmında periyodiktir, periyodu $2\pi/T$'dir; s düzleminin, sanal eksen yönünde genişliği $2\pi/T$ olan her yatay şeridi z düzleminin tamamına eşlenir. Belirsizlik, analog kutupların $|\beta| < \pi/T = 628.3$ rad/s şeridinde olduğu kabul edilerek giderilir; bu, dürtü değişmezliğinin zaten gerektirdiği "bant sınırlı prototip" varsayımıdır.

CEVAP a. $r = 0.95$, $\theta = \pi/8$; $\alpha = 10.26\ \text{s}^{-1}$, $\beta = 78.54$ rad/s b. $K = 6274$; analog 1.000, sayısal 0.987 c. kutuplar değişmez ($e^{j2\pi} = 1$); $|\beta| < \pi/T$ kabul edilir

13.12

← Soru

a. $T/2 = 10^{-4}$ s; kutuplar $s = -5000 \pm j5000$, yani $sT/2 = -0.5 \pm j0.5$:

$$z = \frac{0.5 + j0.5}{1.5 - j0.5} = \frac{(0.5 + j0.5)(1.5 + j0.5)}{2.5} = 0.2 + j0.4,$$

eşleniği $0.2 - j0.4$; $|z| = \sqrt{0.2} = 0.4472 < 1$: kararlıdır. Genel olarak $\text{Re}\{s\} < 0$ ise $|1 + sT/2| < |1 - sT/2|$, yani $|z| < 1$: sol yarı düzlem birim çemberin içine eşlenir. Sıfır $s = 0 \to z = 1$; $s = \infty \to z = -1$.

b. $2/T = 10^4$; $s = 10^4 u$, $u = (1 - z^{-1})/(1 + z^{-1})$:

$$H = \frac{10^8 u}{10^8 u^2 + 10^8 u + 5 \cdot 10^7} = \frac{u}{u^2 + u + 0.5}.$$

Pay ve payda $(1 + z^{-1})^2$ ile çarpılır:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{2.5 - z^{-1} + 0.5z^{-2}} = \frac{0.4(1 - z^{-2})}{1 - 0.4z^{-1} + 0.2z^{-2}}.$$

Payda kökleri $z^2 - 0.4z + 0.2 = 0$: $0.2 \pm j0.4$, a'dakiyle aynı.

c. $\Omega_0 = 7071$ rad/s (1125 Hz). Sayısal tepe $\omega_0 = 2\arctan(\Omega_0 T/2)$'dedir:

$$\omega_0 = 2\arctan(0.7071) = 1.2310 \text{ rad},$$

$$f_0 = \frac{1.2310 \cdot 5000}{2\pi} = 979.6 \text{ Hz}.$$

$H(e^{j\omega}) = H_c\big(j(2/T)\tan(\omega/2)\big)$ olduğundan yanıtın değerleri korunur, yalnız frekans ekseni bükülür: tepe kazancı $H_c(j\Omega_0) = 1$ aynen kalır, yeri 1125 Hz'ten 979.6 Hz'e kayar.

CEVAP a. kutuplar $0.2 \pm j0.4$ ($|z| = 0.4472$, kararlı); sıfırlar $z = 1$ ve $z = -1$
b. $H(z) = 0.4(1 - z^{-2})/(1 - 0.4z^{-1} + 0.2z^{-2})$
c. 979.6 Hz (analog 1125 Hz); tepe kazancı 1 kalır

ertansinansahin.com

KİTABIN TAMAMINDA

- 8 ünite, 144 soru ve hepsinin adım adım çözümü.
- Her ünitenin başında, soruların dayandığı bağıntıları özetleyen hatırlatma kutusu.
- Temel, orta ve ileri düzeyde sorular; her sorunun altında kendi çözümünüz için noktalı alan.
- Sorudan çözüme, çözümden soruya tek tıkla geçiş.

ertansinansahin.com