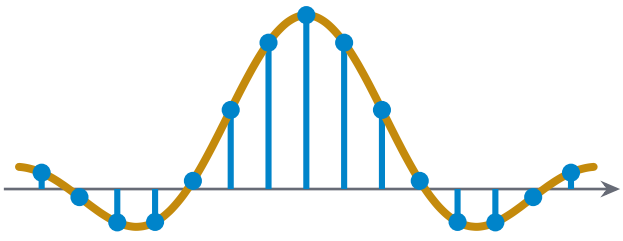
SİNYALLER VE SİSTEMLER

SORU KİTABI

ÖRNEK SAYFALAR

9 ünite · 162 soru · adım adım çözümler



Ertan Sinan Şahin

ertansinansahin.com

Bu kitap nasıl kullanılır?

- Her ünite, soruların dayandığı tanım ve formülleri özetleyen bir hatırlatma kutusuyla açılır.
- Zorluk: ★☆☆ temel ★★☆ orta ★★★ ileri. Her ünitede birkaç çoktan seçmeli kavram sorusu vardır; ünitenin son sorusu, birden çok konuyu birleştiren sınav tipi bir karma sorudur.
- Her sorunun altındaki noktalı alan sizin çözümünüz içindir. Önce kendiniz çözün; takıldığınızda hatırlatma kutusuna ve ders notuna dönün, çözüme en son bakın.
- Bütün çözümler kitabın sonundadır. Sorunun yanındaki Çözüm → bağlantısı çözüme, çözümdeki ← Soru bağlantısı soruya götürür. Kısa cevaplar **CEVAP** kutusundadır.
- **Ortak üniteler:** Ünite 7–9 (ayrık zamanlı Fourier dönüşümü, örnekleme, z dönüşümü) *Sayısal Sinyal İşleme* kitabında da vardır; ikinci dersi bu konularla başlayan okullar için o kitapta tekrar yer alır.
- **Vize ve final:** Vize çoğunlukla sinyaller, sistem özellikleri, konvolüsyon ve Fourier serilerine (Ünite 1–4) kadardır; final sürekli zamanlı Fourier ve Laplace dönüşümlerini, ayrık zamanlı Fourier dönüşümünü, örneklemeyi ve z dönüşümünü (Ünite 5–9) ekler. Konu sırası ve kapsamı okuldan okula değişir; kendi dersinizin izlencesine göre çalışacağınız üniteleri seçin. Bazı üniversitelerde bu dersin adı İşaretler ve Sistemler'dir.

İçindekiler

Sayfa numaraları tam kitaba aittir. Renkli üniteler bu örnekte vardır; tıklayınca o üniteye gidersiniz.

1 Sinyaller ..... 14 soru 4

2 Sistemler ve Özellikleri ..... 16 soru 11

3 **Konvolüsyon** ..... 20 soru 20

4 Fourier Serileri ..... 18 soru 31

5 **Sürekli Zamanlı Fourier Dönüşümü** ..... 20 soru 40

6 Laplace Dönüşümü ..... 20 soru 51

7 Ayrık Zamanlı Fourier Dönüşümü ..... 18 soru 62

8 **Örnekleme** ..... 16 soru 71

9 z Dönüşümü ..... 20 soru 79

Çözümler 90

3. ÜNİTE
KONVOLÜSYON

konvolüsyon toplamı $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$

konvolüsyon integrali $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$

dürtüyle konvolüsyon $x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$

seri ve paralel $h_1*h_2, \quad h_1+h_2$

geometrik toplam $\sum_{k=0}^{N-1} a^k=\frac{1-a^N}{1-a}$

alan ve toplam $\sum_n y[n]=\sum_n x[n]\sum_n h[n]$

dublet $\delta'(t)$ $\frac{du(t)}{dt}=\delta(t), \quad x(t)*\delta'(t)=\frac{dx(t)}{dt}$

nedensellik $h[n]=0\ (n<0), \quad h(t)=0\ (t<0)$

kararlılık (SGSÇ) $\sum_n |h[n]|<\infty, \quad \int |h(t)|\,dt<\infty$

ayrık basamak yanıtı $s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$

sürekli basamak yanıtı $s(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau$

ters bağıntı $h[n]=s[n]-s[n-1], \quad h(t)=\frac{ds(t)}{dt}$

Bu ünitede sistemler, aksi söylenmedikçe doğrusal zamanla değişmez (DZD) sistemlerdir ve dürtü yanıtıyla ($h[n]$ ya da $h(t)$) tam olarak belirlenir: çıkış, giriş ile dürtü yanıtının konvolüsyonudur (evrişimidir): $y=x*h$. Sonlu diziler $\{\dots\}$ içinde yazılır ve ilk elemanın indisi ayrıca belirtilir; kök grafiklerinde gösterilmeyen örnekler sıfırdır. Şekillerde giriş mavi, dürtü yanıtı kırmızı çizilir. Fark ve diferansiyel denklemlerle verilen sistemler başlangıçta durgundur: giriş uygulanmadan önce çıkış sıfırdır. $s[n]$ ve $s(t)$ basamak yanıtıdır. Kararlılık sınırlı giriş–sınırlı çıkış (SGSÇ) anlamındadır. Birimi verilmeyen t saniye, n örnek indisidir.

DZD sistemler ve konvolüsyon toplamı

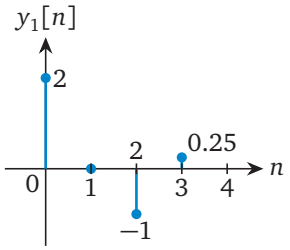
3.1 ★☆☆ Çözüm →

$x[n]$ yalnız $2\le n\le 9$ aralığında, bir DZD sistemin dürtü yanıtı $h[n]$ ise yalnız $-2\le n\le 4$ aralığında sıfırdan farklıdır. Çıkış $y[n]=x[n]*h[n]$ en çok hangi aralıkta sıfırdan farklı olabilir?

A) $0\le n\le 13$ **B)** $0\le n\le 14$ **C)** $-2\le n\le 9$ **D)** $2\le n\le 4$ **E)** $4\le n\le 13$

3.3 ★★☆ Çözüm →

Bir kablolu haberleşme kanalı, nedensel ve sonlu dürtü yanıtlı bir DZD sistem olarak modelleniyor. Kanalı tanımak için girişe bilinen $x_1[n] = 2\delta[n] - \delta[n-1]$ eğitim dizisi gönderiliyor; alıcıda şekildeki $y_1[n]$ ölçülüyor ($n \geq 4$ için $y_1[n] = 0$; gürültü yok).



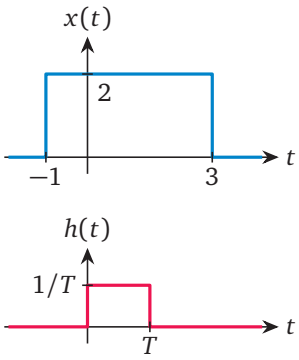
a. $h[n]$ kaç örnek uzunluğundadır? $h[n]$'yi bulunuz.

b. Aynı kanaldan $x_2[n] = \delta[n] + \delta[n-1] - \delta[n-2]$ sembol dizisi gönderiliyor. Alıcıda ne ölçülür?

Konvolüsyon integrali

3.7 ★★☆ Çözüm →

Bir telsiz alıcısında algılanan darbe zarfı $x(t)$ (şekil), T saniyelik kayan ortalama filtresinden geçiriliyor: $h(t) = \frac{1}{T}\,[u(t) - u(t-T)]$.



a. $T = 1.5$ s için $y(t)$'yi bütün t için bulunuz ve çiziniz.

b. Çıkışın 2'ye eşit kaldığı (düz tepe) süre en az 3.2 s olmalıdır. T en çok kaç saniye olabilir?

c. $T = 5$ s seçilirse çıkışın tepe değeri ne olur, hangi aralıkta sürer?

5. ÜNİTE

SÜREKLİ ZAMANLI FOURİER DÖNÜŞÜMÜ

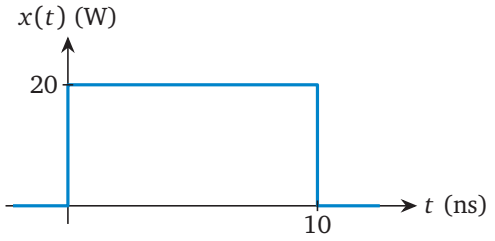
analiz	$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$	zaman öteleme	$x(t-t_0)\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
sentez	$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$	ölçekleme	$x(at)\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
üstel ($a>0$)	$e^{-at}u(t)\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}\frac{1}{a+j\omega}$	türev	$\frac{dx}{dt}\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} j\omega X(j\omega)$
dikdörtgen	$1\,(\lvert t\rvert<T_1)\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}$	integral	$\int_{-\infty}^{t} x\,d\tau\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}\frac{X(j\omega)}{j\omega}+\pi X(0)\delta(\omega)$
sinc	$\frac{\sin Wt}{\pi t}\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}1\,(\lvert\omega\rvert<W)$	konvolüsyon (evrişim)	$x*h\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}X(j\omega)H(j\omega)$
dürtü, sabit	$\delta(t)\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}1,\quad 1\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}2\pi\delta(\omega)$	modülasyon	$x\cos\omega_c t\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}\frac{1}{2}\sum_{\pm}X(j(\omega\mp\omega_c))$
kosinüs	$\cos\omega_0 t\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$	Parseval	$\int\lvert x(t)\rvert^2dt=\frac{1}{2\pi}\int\lvert X(j\omega)\rvert^2d\omega$
sinüs	$\sin\omega_0 t\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$		

Bu ünitede ω açısal frekanstır (rad/s), $f=\omega/2\pi$ (Hz). Çıkış $Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)$'dır; $\cos(\omega_0 t+\phi)$ girişi, genliği $|H(j\omega_0)|$ ile çarpılıp fazı $\angle H(j\omega_0)$ kadar kayarak çıkar. Diferansiyel denklemli sistemler başlangıçta durgundur. Kesim frekansı, $|H|$'nın geçirme bandındaki değerinin $1/\sqrt{2}$ katına (-3 dB) indiği frekanstır; ideal filtrede $|H|$ geçirme bandında 1, durdurma bandında 0'dır. Şekillerde sinyal mavi, sistem kırmızıdır.

Fourier dönüşümü ve temel çiftler

5.2 ★☆☆ Çözüm →

Bir lidarın lazer diyotu $t=0$'da başlayan, 10 ns süreli, 20 W tepe güçlü dikdörtgen bir ışık darbesi $x(t)$ yayıyor (şekil). Zamanı ns cinsinden, ω'yı rad/ns cinsinden alınız (1 rad/ns $=10^9$ rad/s).



a. $X(j\omega)$'yı bulunuz; $|X(j\omega)|$ ve $\angle X(j\omega)$'yı yazınız.

b. $X(0)$ nedir? Fiziksel anlamı nedir?

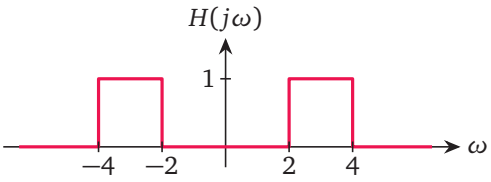
c. $|X(j\omega)|$'nın ilk sıfırı hangi ω'dadır? Bu kaç MHz'e karşılık gelir?

d. 50 MHz'te $|X|$, $X(0)$'ın kaç katıdır (dB)?

Filtreler, doğrusal faz ve gecikme

5.13 ★★☆ Çözüm →

$x(t) = \sin(6t)/(\pi t)$ sinyali, geçirme bandı $2 < |\omega| < 4$ olan ideal bant geçiren filtreye (sıfır fazlı, şekil) uygulanıyor.



a. $X(j\omega)$'yı ve $Y(j\omega)$'yı çiziniz.

b. $y(t)$'yi bulunuz; bir kosinüs ile bir sinüsün çarpımı olarak yazınız.

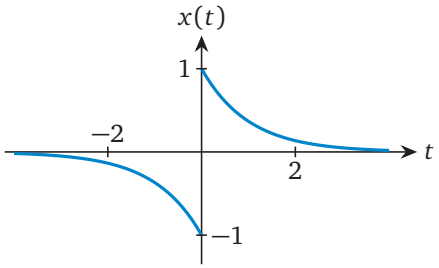
c. Giriş ve çıkışın enerjilerini bulunuz. Enerjinin ne kadarı geçer?

d. $y(0)$ nedir?

Karma sorular

5.18 ★★★ Çözüm →

Şekildeki $x(t) = e^{-t}u(t) - e^{t}u(-t)$ sinyali veriliyor.



a. $X(j\omega)$'yı bulunuz. Eşlenik simetri özelliğiyle (x gerçelse $X(-j\omega) = X^*(j\omega)$) sonucu yorumlayınız.

b. $y(t) = x(t) * x(t)$'nin dönüşümü $Y(j\omega)$'yı bulup $A/(1+\omega^2) + B/(1+\omega^2)^2$ biçiminde yazınız.

c. $e^{-|t|} \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} 2/(1+\omega^2)$ ve $(1+|t|)e^{-|t|} \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} 4/(1+\omega^2)^2$ olduğuna göre $y(t)$'yi bulunuz.

d. $y(0)$'ı hem $y(t)$'den hem de $\frac{1}{2\pi}\int Y\,d\omega$ ile bulunuz.

8. ÜNİTE
ÖRNEKLEME

dürtü treni
$$p(t)=\sum_n \delta(t-nT) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{2\pi}{T}\sum_k \delta(\Omega-k\Omega_s)$$

çarpma
$$x(t)p(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}X(j\Omega)*P(j\Omega)$$

örneklenmiş spektrum
$$X_p(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_k X\big(j(\Omega-k\Omega_s)\big)$$

ayrık spektrum
$$X(e^{j\omega})=X_p(j\omega/T), \quad x[n]=x(nT)$$

örnekleme teoremi
$$\Omega_s > 2\Omega_M \quad (f_s > 2f_M)$$

ideal yeniden oluşturma
$$x_r(t)=\sum_n x[n]\frac{\sin\big(\pi(t-nT)/T\big)}{\pi(t-nT)/T}$$

sıfırıncı derece tutucu
$$H_0(j\Omega)=Te^{-j\Omega T/2}\frac{\sin(\Omega T/2)}{\Omega T/2}$$

ayrık işleme (örtüşmesiz)
$$H_{\text{eş}}(j\Omega)=H(e^{j\Omega T}),\ |\Omega|<\pi/T$$

ondalama
$$x_d[n]=x[nM]$$
$$X_d(e^{j\omega})=\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}X\big(e^{j(\omega-2\pi i)/M}\big)$$

genişletme
$$x_e[n]=x[n/L]\ (n=0,\pm L,\dots), \quad X_e(e^{j\omega})=X(e^{j\omega L})$$

frekanslar
$$\omega=\Omega T, \quad \Omega_s=\frac{2\pi}{T}=2\pi f_s$$

Bu ünitede iki frekans değişkeni birlikte kullanılır: Ω sürekli zamanlı açısal frekanstır (rad/s), ω ayrık zamanlı frekanstır (rad/örnek); bağıntı $\omega=\Omega T$'dir. Hertz cinsinden frekans f, örnekleme frekansı $f_s=1/T$'dir. Örnekleme, $x(t)$'nin dürtü treniyle çarpılmasıdır; frekans alanında bu çarpma, spektrumların konvolüsyonuna (evrişimine) karşılık gelir ve spektrumun Ω_s aralıklı kopyalarını üretir. Kopyalar üst üste binerse örtüşme (aliasing) olur. İdeal C/D (sürekliden ayrığa) dönüştürücü $x[n]=x(nT)$ üretir; dizinin spektrumu ayrık zamanlı Fourier dönüşümüdür (DTFT), $X(e^{j\omega})$. İdeal D/C (ayrıktan sürekliye) dönüştürücü, kazancı T ve kesim frekansı $\Omega_s/2$ olan ideal alçak geçiren filtreyle yeniden oluşturma yapar. Aksi söylenmedikçe sinyaller gerçeldir; spektrum şekilleri gerçel ve çifttir, yalnız $\Omega\geq 0$ çizilen şekillerde eksi taraf aynadır. Nyquist hızı $2f_M$'dir (f_M sinyalin en yüksek frekansı).

Dürtü treniyle örnekleme ve örnekleme teoremi

8.1 ★☆☆ Çözüm →

Gerçel $x(t)$ sinyalinin spektrumu $|f|>2.5$ kHz için sıfırdır. Aşağıdaki sinyallerden hangisinin Nyquist hızı 15 kHz'tir?

A) $x(t)*x(t)$ (konvolüsyon)

B) $x^3(t)$

C) $x(t)\cos(2\pi\cdot 4000\,t)$

D) $x^2(2t)$

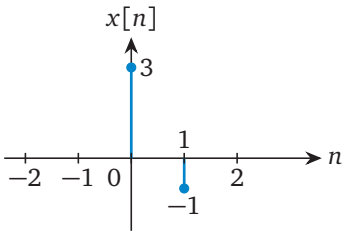
E) $x(t)\dfrac{dx(t)}{dt}$

Yeniden oluşturma ve örtüşme önleyici filtre

8.6

★★☆ Çözüm →

İdeal D/C dönüştürücüye ($T = 0.5$ ms) şekildeki dizi veriliyor: $x[0] = 3$, $x[1] = -1$, öteki örnekler sıfırdır.



a. Yeniden oluşturulan $x_r(t)$'nin ifadesini yazınız.

b. $x_r(0.25\text{ ms})$ ve $x_r(0.75\text{ ms})$ değerlerini bulunuz.

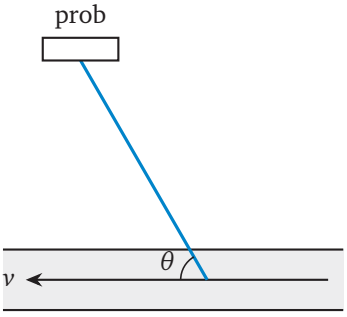
c. $x_r(t)$'nin spektrumu $X_r(j\Omega)$'yı bulunuz. $|X_r(j\Omega)|$ hangi Ω'da en büyüktür?

Karma sorular

8.15

★★★ Çözüm →

Darbeli Doppler ultrason cihazının prob frekansı $f_0 = 5$ MHz, dokuda ses hızı $c = 1540$ m/s, ses demeti ile kan akışı arasındaki açı $\theta = 60°$'dir (şekil; kan proba doğru akıyor). Doppler kayması $f_D = 2vf_0\cos\theta/c$'dir. Doppler sinyali darbe tekrarlama frekansında (PRF, pulse repetition frequency) örneklenir: $f_s = \text{PRF} = 6$ kHz. Cihaz sinyalden karmaşık örnekler alır; görünen frekans $-f_s/2 \le f < f_s/2$ aralığına getirilir ve frekansın eksi ya da artı oluşu akış yönünü gösterir.



a. Örtüşmeden ölçülebilecek en büyük hız nedir?

b. Gerçek hızı $v = 1.2$ m/s olan kan için görünen Doppler frekansını ve görünen hızı bulunuz.

c. Damar $d = 12$ cm derinlikte; yankı dönmeden darbe gönderilemez: $\text{PRF} \le c/(2d)$. PRF'yi artırmak yeter mi? Yetmiyorsa f_0 en çok kaç MHz olmalıdır?

ÇÖZÜMLER

3 KONVOLÜSYON

3.1

← Soru

$y[n]=\sum_k x[k]h[n-k]$ toplamında bir terimin sıfırdan farklı olması için hem $2\le k\le 9$ hem de $-2\le n-k\le 4$ olmalıdır. İki koşulun birlikte sağlanabildiği n değerleri, alt sınırların ve üst sınırların toplanmasıyla bulunur:

$$2+(-2)=0\le n\le 9+4=13.$$

Uç örnekler tek terimden oluşur:
$y[0]=x[2]h[-2]\neq 0$ ve $y[13]=x[9]h[4]\neq 0$.
Örnek sayısı $8+7-1=14$'tür.

- (B): Uzunluklar toplanıp $8+7=15$ örnek alınmıştır; doğrusu $8+7-1=14$'tür.
- (C): İki aralığın birleşimidir; konvolüsyonda aralıklar birleşmez, sınırlar toplanır.
- (D): İki aralığın kesişimidir; bu, çarpımın ($x[n]h[n]$) sıfırdan farklı olduğu aralıktır.
- (E): Alt sınır $2-(-2)=4$ diye çıkarmayla bulunmuştur; başlangıç indisleri toplanır.

CEVAP A

3.3

← Soru

a. Sonlu dizilerde çıkış uzunluğu $L_y=L_x+L_h-1$'dir: $4=2+L_h-1$, yani $L_h=3$ ($n=0,1,2$). Konvolüsyon, giriş örnekleriyle yazılır:

$$y_1[n]=2h[n]-h[n-1].$$

Kanal nedensel olduğundan $h[-1]=0$'dır ve denklem $n=0$'dan başlayarak sırayla çözülür:

$$h[0]=\frac{y_1[0]}{2}=1,\qquad h[1]=\frac{y_1[1]+h[0]}{2}=0.5,$$

$$h[2]=\frac{y_1[2]+h[1]}{2}=\frac{-1+0.5}{2}=-0.25.$$

Kontrol: Son ölçüm yalnız $h[2]$'yi içerir: $y_1[3]=-h[2]=0.25$; ölçümle aynıdır.

b. $y_2[n]=h[n]+h[n-1]-h[n-2]$; kopyalar toplanır:

n	0	1	2	3	4
$h[n]$	1	0.5	−0.25		
$h[n-1]$		1	0.5	−0.25	
$-h[n-2]$			−1	−0.5	0.25
$y_2[n]$	1	1.5	−0.75	−0.75	0.25

İlk üç örneğin işaretleri gönderilen sembollerinkiyle $(+,+,-)$ aynıdır, ama genlikleri değişmiştir ve dizi iki örnek uzamıştır: kanal, her sembolü komşularına yayar (semboller arası girişim).

CEVAP a. 3 örnek; $h[n]=\{1,0.5,-0.25\}$, $n=0,1,2$ b. $y_2[n]=\{1,1.5,-0.75,-0.75,0.25\}$, $n=0,\dots,4$

3.7

← Soru

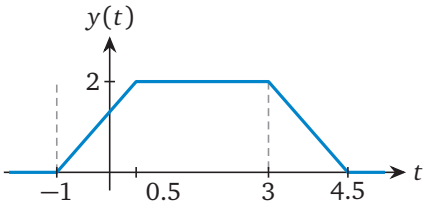
a. $h(t-\tau)$, $t-T\le\tau\le t$'de $1/T$'dir; çıkış, girişin son T saniyedeki ortalamasıdır:

$$y(t)=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}x(\tau)\,d\tau.$$

$T=1.5$ için pencere $[t-1.5,\,t]$ darbenin ($[-1,3]$) üstünde kayar:

- $t<-1$ ya da $t-1.5>3$ ($t>4.5$): çakışma yok, $y=0$.
- $-1\le t\le 0.5$: çakışma $[-1,t]$, $y=\frac{2}{1.5}(t+1)=\frac{4}{3}(t+1)$.
- $0.5\le t\le 3$: pencere darbenin içinde, $y=2$.
- $3\le t\le 4.5$: çakışma $[t-1.5,\,3]$, $y=\frac{4}{3}(4.5-t)$.

Sınırlarda ifadeler birleşir: $\frac{4}{3}(0.5+1)=2$. Çıkış, yükselme ve inme süreleri $T=1.5$ s olan bir yamuktur:



Kesikli çizgiler girişin kenarlarıdır: kayan ortalama keskin kenarları T süresince yayar.

ertansinansahin.com

b. $T \le 4$ iken düz tepe, pencerenin tamamen darbenin içinde kaldığı $-1+T \le t \le 3$ aralığıdır; süresi $4-T$'dir:

$$4-T \ge 3.2 \;\Rightarrow\; T \le 0.8 \text{ s}.$$

c. $T = 5 > 4$ iken pencere darbeyi tamamen içine alabilir; bu, $t-5 \le -1$ ve $t \ge 3$, yani $3 \le t \le 4$ aralığında olur. Orada çıkış, darbenin alanının $(2 \cdot 4 = 8)$ T'ye bölümüdür:

$$y = \frac{8}{5} = 1.6 \qquad (3 \le t \le 4).$$

Pencere darbeden uzun olunca tepe değeri düşer: darbe pencerenin ancak bir kısmını doldurur.

CEVAP a. $y = 0$ $(t < -1,\ t > 4.5)$; $(4/3)(t+1)$ $(-1 \le t \le 0.5)$; 2 $(0.5 \le t \le 3)$; $(4/3)(4.5-t)$ $(3 \le t \le 4.5)$ b. $T \le 0.8$ s c. 1.6; $3 \le t \le 4$

5 SÜREKLİ ZAMANLI FOURİER DÖNÜŞÜMÜ

5.2

← Soru

a. Darbe yalnız $0 \le t \le 10$'da 20'dir:

$$X(j\omega) = \int_0^{10} 20\,e^{-j\omega t}\,dt = \frac{20(1-e^{-j10\omega})}{j\omega}.$$

$1-e^{-j10\omega} = e^{-j5\omega} \cdot 2j \sin 5\omega$ ile:

$$X(j\omega) = 200\,\frac{\sin 5\omega}{5\omega}\,e^{-j5\omega} \text{ W ns},$$

$$|X| = 200\left|\frac{\sin 5\omega}{5\omega}\right|, \qquad \angle X = -5\omega.$$

($\sin 5\omega$ eksiye dönünce faza π eklenir.) Doğrusal faz, darbe ortasının $t = 5$ ns'ye ötelenmesinden gelir.

b. $X(0) = \int x\,dt = 20(10) = 200$ W ns $= 200$ nJ: darbedeki ışık enerjisidir.

c. $\sin 5\omega = 0$, $\omega \ne 0$: ilk sıfır $5\omega = \pi$:

$$\omega = \frac{\pi}{5} = 0.6283 \text{ rad/ns},$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0.1 \text{ GHz} = 100 \text{ MHz}.$$

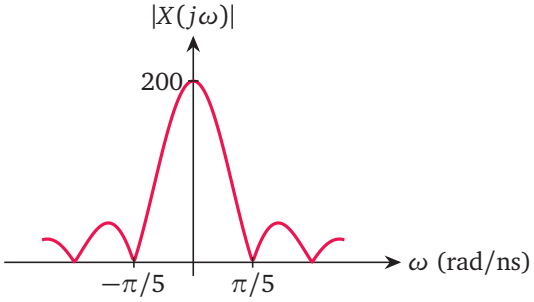
Üç anlamlı rakamla $\omega = 0.628$ rad/ns. İlk sıfırın frekansı $f = 1/$(darbe süresi)'dir; darbe kısaldıkça spektrum genişler.

d. 50 MHz: $\omega = 2\pi(0.05) = \pi/10$ rad/ns, $5\omega = \pi/2$:

$$\frac{|X|}{X(0)} = \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} = 0.6366,$$

$$20\log_{10} 0.6366 = -3.92 \text{ dB}.$$

Üç anlamlı rakamla oran 0.637'dir.

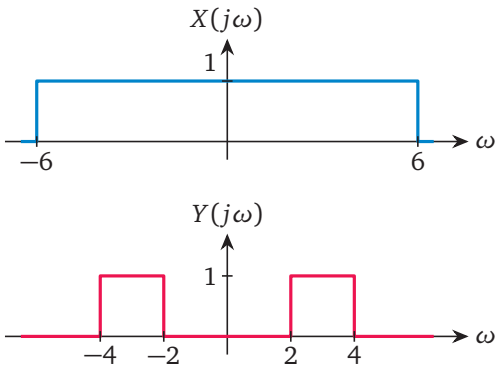


CEVAP a. $X(j\omega) = 200\,[\sin 5\omega/(5\omega)]\,e^{-j5\omega}$ W ns; $|X| = 200|\sin 5\omega/(5\omega)|$, $\angle X = -5\omega$ ($\sin 5\omega < 0$ aralıklarında $\pm\pi$ eklenir) b. 200 nJ (darbe enerjisi) c. $\omega = \pi/5 = 0.628$ rad/ns; 100 MHz d. $2/\pi = 0.637$; −3.92 dB

5.13

← Soru

a. $\sin Wt/(\pi t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 1$ $(|\omega| < W)$: $X(j\omega) = 1$ $(|\omega| < 6)$. $Y = XH = 1$ $(2 < |\omega| < 4)$:



b. Y, iki ideal alçak geçiren spektrumun farkıdır $(W = 4$ ve $W = 2)$:

$$y(t) = \frac{\sin 4t}{\pi t} - \frac{\sin 2t}{\pi t} = \frac{2}{\pi t}\cos 3t\,\sin t,$$

$(\sin 4t - \sin 2t = 2\cos 3t \sin t)$. y, bandın ortasındaki (3 rad/s) kosinüsün $\sin t/(\pi t)$ zarfıyla çarpımıdır.

c. Parseval:

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-6}^{6} 1\,d\omega = \frac{12}{2\pi} = \frac{6}{\pi} = 1.910,$$

$$E_y = \frac{1}{2\pi} \cdot 2(4-2) = \frac{2}{\pi} = 0.6366.$$

Üç anlamlı rakamla $E_x = 1.91$, $E_y = 0.637$. Enerjinin 1/3'i geçer (bant, spektrumun düz kısmının üçte biridir).

ertansinansahin.com

d. $\sin at/(\pi t) \to a/\pi$ $(t \to 0)$:
$y(0) = (4-2)/\pi = 0.6366$. **Kontrol:**
$y(0) = \frac{1}{2\pi}\int Y\,d\omega = 4/2\pi$.

CEVAP a. $X = 1$ $(|\omega| < 6)$; $Y = 1$ $(2 < |\omega| < 4)$
b. $y = (\sin 4t - \sin 2t)/(\pi t) = (2/\pi t)\cos 3t \sin t$
c. $E_x = 6/\pi = 1.91$, $E_y = 2/\pi = 0.637$; 1/3
d. $2/\pi = 0.637$

5.18

← Soru

a. $e^{-t}u(t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} 1/(1+j\omega)$; ters çevirmeyle $e^{t}u(-t) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} 1/(1-j\omega)$:

$$X(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} - \frac{1}{1-j\omega} = \frac{-2j\omega}{1+\omega^2}.$$

x gerçel ve tektir; dönüşümü de saf sanal ve tektir $(X(-j\omega) = -X(j\omega) = X^*(j\omega))$.

b. Konvolüsyon özelliği:

$$Y(j\omega) = X^2 = \frac{-4\omega^2}{(1+\omega^2)^2}.$$

$\omega^2 = (1+\omega^2) - 1$ yazılır:

$$Y(j\omega) = \frac{-4}{1+\omega^2} + \frac{4}{(1+\omega^2)^2}, \qquad A = -4,\ B = 4.$$

c. Verilen çiftlerle ilk terim $-2e^{-|t|}$, ikincisi $(1+|t|)e^{-|t|}$'dir:

$$y(t) = -2e^{-|t|} + (1+|t|)e^{-|t|} = (|t|-1)\,e^{-|t|}.$$

y çifttir (iki tek sinyalin konvolüsyonu çifttir) ve gerçeldir; Y de gerçel ve çifttir.

d. $y(0) = (0-1)e^0 = -1$. Frekanstan $(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{(1+\omega^2)^2}d\omega = \frac{\pi}{2})$:

$$y(0) = \frac{1}{2\pi}\int Y\,d\omega = \frac{-4}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = -1.$$

Ayrıca $y(0) = \int x(\tau)x(-\tau)\,d\tau = -\int x^2\,d\tau = -1$; x'in enerjisi 1'dir.

CEVAP a. $X = -2j\omega/(1+\omega^2)$ (saf sanal, tek)
b. $Y = -4/(1+\omega^2) + 4/(1+\omega^2)^2$
c. $y(t) = (|t|-1)e^{-|t|}$ d. $y(0) = -1$

8 ÖRNEKLEME

8.1

← Soru

Nyquist hızı, sinyalin en yüksek frekansının iki katıdır. Her işlemin bant genişliğine etkisi:

- Zamanda çarpma, frekansta konvolüsyondur: iki sinyalin çarpımının bandı, bantların toplamıdır. x^3'ün bandı $3(2.5) = 7.5$ kHz'tir; Nyquist hızı $2(7.5) = 15$ kHz. (B) doğrudur.
- (A): Zamanda konvolüsyon, frekansta çarpımdır: $X^2(j\Omega)$; bant değişmez (2.5 kHz), Nyquist hızı 5 kHz.
- (C): Kosinüsle çarpma spektrumu ± 4 kHz'e öteler; en yüksek frekans $4 + 2.5 = 6.5$ kHz, Nyquist hızı 13 kHz.
- (D): x^2'nin bandı 5 kHz'tir; zamanda 2 kat sıkıştırma bandı 2 katına çıkarır: 10 kHz, Nyquist hızı 20 kHz.
- (E): Türev bandı değiştirmez $(j\Omega X(j\Omega))$; iki 2.5 kHz'lik sinyalin çarpımının bandı 5 kHz, Nyquist hızı 10 kHz.

CEVAP B

8.6

← Soru

a. İdeal yeniden oluşturmada her örnek, nT'de ortalanmış ara değerleme fonksiyonu $\phi(v) = \sin(\pi v)/(\pi v)$ ile çarpılır $(v = t/T - n)$; yalnız iki terim kalır:

$$x_r(t) = 3\,\phi\Big(\frac{t}{T}\Big) - \phi\Big(\frac{t}{T} - 1\Big),$$

$$x_r(t) = 3\,\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} - \frac{\sin\big(\pi(t-T)/T\big)}{\pi(t-T)/T}.$$

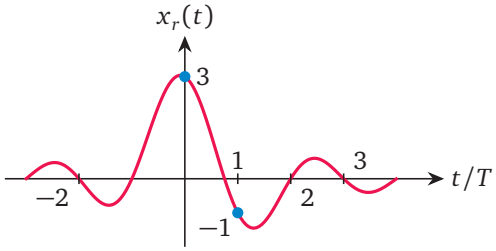
b. $t = 0.25$ ms $= T/2$: iki argüman $\pi/2$ ve $-\pi/2$'dir; $\sin(\pi/2)/(\pi/2) = 2/\pi = 0.6366$:

$$x_r(T/2) = (3-1)\frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi} = 1.273.$$

$t = 0.75$ ms $= 1.5T$: argümanlar 1.5π ve 0.5π; $\sin(1.5\pi)/(1.5\pi) = -2/(3\pi) = -0.2122$:

$$x_r(1.5T) = 3\Big(-\frac{2}{3\pi}\Big) - \frac{2}{\pi} = -\frac{4}{\pi} = -1.273.$$

ertansinansahin.com



Eğri örnek anlarında ($t = nT$) örnek değerlerinden geçer (mavi noktalar), t/T'nin öteki tam sayı değerlerinde sıfırdır; örnekler arasında ve dışında salınır.

c. $x[n]$'nin DTFT'si $X(e^{j\omega}) = 3 - e^{-j\omega}$'dır. İdeal D/C, $X(e^{j\Omega T})$'yi T kazancıyla $|\Omega| < \pi/T$ bandında geçirir:

$$X_r(j\Omega) = T\left(3 - e^{-j\Omega T}\right)$$

$|\Omega| < \pi/T = 2000\pi$'de, dışında sıfırdır. $|3 - e^{-j\Omega T}|^2 = 10 - 6\cos(\Omega T)$, $\Omega T = \pm\pi$'de en büyüktür: $|\Omega| \to 2000\pi$ rad/s (1 kHz) yakınında $|X_r| = 4T = 2 \times 10^{-3}$. Ardışık örnekler işaret değiştirdiği için enerji bandın üst ucunda toplanır.

Kontrol: $t = T$'de birinci terim $3\sin(\pi)/\pi = 0$, ikinci terim -1'dir: $x_r(T) = x[1] = -1$.

CEVAP a. $x_r(t) = 3\phi(t/T) - \phi(t/T - 1)$, $\phi(v) = \sin(\pi v)/(\pi v)$ b. $4/\pi = 1.273$; $-4/\pi = -1.273$ c. $X_r = T(3 - e^{-j\Omega T})$ ($|\Omega| < 2000\pi$); en büyük $|\Omega| \to 2000\pi$'de, $4T = 2 \times 10^{-3}$

8.15

← Soru

a. Örtüşmesiz aralık $|f_D| < f_s/2 = 3$ kHz'tir. $\cos 60° = 0.5$ ile $f_D = 2v(5 \times 10^6)(0.5)/1540 = 3247v$ (Hz, v m/s cinsinden):

$$v_{\text{maks}} = \frac{(f_s/2)\,c}{2f_0 \cos\theta} = \frac{3000 \cdot 1540}{2(5 \times 10^6)(0.5)} = 0.924 \text{ m/s}.$$

b. Gerçek kayma:

$$f_D = \frac{2(1.2)(5 \times 10^6)(0.5)}{1540} = 3896 \text{ Hz}.$$

$3896 > 3000$: örtüşür. f_s çıkarılarak aralığa getirilir: $3896 - 6000 = -2104$ Hz. Görünen hız:

$$v_g = \frac{-2104 \cdot 1540}{2(5 \times 10^6)(0.5)} = -0.648 \text{ m/s}.$$

Cihaz akışı ters yönde ve 0.648 m/s olarak gösterir. Spektrum ekranında tepe üst kenardan kesilip alttan geri girer.

c. $\text{PRF}_{\text{maks}} = 1540/(2 \cdot 0.12) = 6417$ Hz; örtüşmesiz sınır $6417/2 = 3208$ Hz < 3896 Hz. PRF'yi artırmak yetmez (gereken $2(3896) = 7792$ Hz). f_D, f_0 ile orantılıdır; $f_D \le 3208$ Hz için:

$$f_0 \le 5 \text{ MHz} \cdot \frac{3208}{3896} = 4.117 \text{ MHz}.$$

Sınırı aşmamak için aşağı yuvarlanır: $f_0 \le 4.11$ MHz. Düşük prob frekansı kaymayı küçültür; derin damarlarda bu yüzden düşük frekanslı prob seçilir. (Açıyı büyütmek de $\cos\theta$'yı küçültür, ama açı düzeltme hatasını artırır.)

Kontrol: $f_0 = 4.117$ MHz ile

$$f_D = 3896 \cdot \frac{4.117}{5} = 3208 \text{ Hz};$$

kayma tam sınırdadır (4.12 MHz ile 3210 Hz olur, sınırı aşar).

CEVAP a. 0.924 m/s b. $f_D = 3896$ Hz; görünen -2104 Hz, -0.648 m/s (ters yön) c. yetmez ($\text{PRF}_{\text{maks}} = 6417$ Hz, sınır 3208 Hz); $f_0 \le 4.11$ MHz

ertansinansahin.com

KİTABIN TAMAMINDA

- 9 ünite, 162 soru ve hepsinin adım adım çözümü.
- Her ünitenin başında, soruların dayandığı bağıntıları özetleyen hatırlatma kutusu.
- Temel, orta ve ileri düzeyde sorular; her sorunun altında kendi çözümünüz için noktalı alan.
- Sorudan çözüme, çözümden soruya tek tıkla geçiş.

ertansinansahin.com